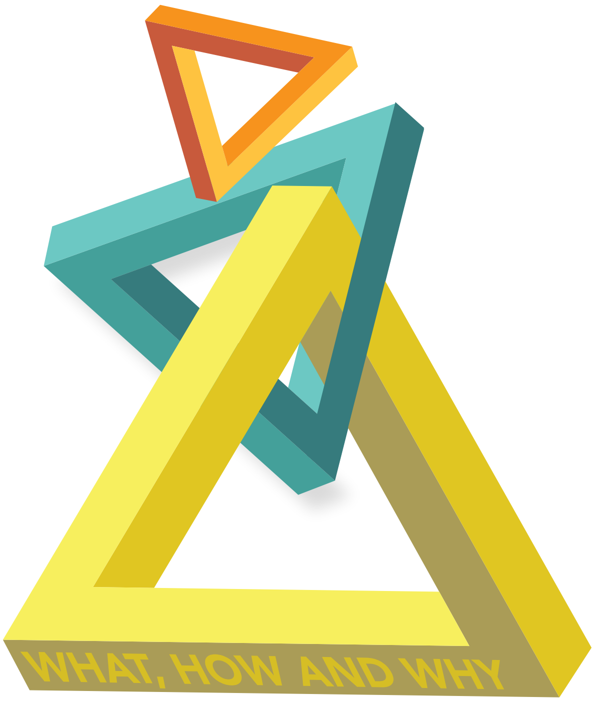
Horizontes Educativos

INVESTIGACIÓN



QUÉ, CÓMO Y POR QUÉ:

una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

WHAT, HOW AND WHY:

an international conversation on mathematics teacher learning

ARMANDO SOLARES ROJAS, A. PAULINO PRECIADO BABB
KRISTA FRANCIS *(Coordinadores)*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Horizontes Educativos

Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning

Horizontes Educativos

Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning

Coordinadores
Dr. Armando Solares Rojas (UPN)
Dr. A. Paulino Preciado Babb (UdeC)
Dra. Krista Francis (UdeC)

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSITY OF CALGARY
WERKLUND SCHOOL OF EDUCATION

Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas

What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning

Coordinadores
*Dr. Armando Solares Roja*s (UPN)
Dr. A. Paulino Preciado Babb (UdeC)
*Dra. Krista Franci*s (UdeC)

Primera edición, diciembre de 2014

Esta edición es propiedad de la Universidad Pedagógica Nacional, Carretera al Ajusco número 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, CP 14200, México, DF.
www.upn.mx
Esta obra fue dictaminada por pares académicos
ISBN Universidad Pedagógica Nacional 978-607-413-194-9
ISBN Universidad de Calgary 978-0-88953-378-3

QA10.5
Q4.2 Qué cómo y porqué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas=Wath, how and why : an internacional conversation on mathematics teacher learning / coord. Armando Solares Rojas. - México: UPN/UdeC, 2014.
1. texto electrónico (204 p.) : 7.7 Mb : archivo PDF
ISBN: 978-607-413-194-9
ISBN: 978-0-88953-378-3

1. Maestros de matemáticas en servicio, Formación de
I. Solares Rojas Armando, coord.

ÍNDICE / TABLE OF CONTENTS

INTRODUCCIÓN

El propósito de este libro es provocar un diálogo entre formadores de profesores de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), México, y la Escuela de Educación Werklund (WSE, por sus siglas en inglés), antes Facultad de Educación,[1] de la Universidad de Calgary, Canadá, acerca de **qué** matemáticas deberían saber los profesores, **cómo** pueden ser apoyados para desarrollar y utilizar estos conocimientos matemáticos en sus prácticas y **por qué** el conocimiento de los profesores y sus aprendizajes son asuntos tan importantes para la educación básica y media superior en ambos países.

Antecede a este libro el "Primer Encuentro entre la Universidad Pedagógica Nacional y la Facultad de Educación de la Universidad de Calgary", realizado en febrero de 2013 en la UPN Ajusco, de la Ciudad de México, con la finalidad de discutir problemas y diversas aproximaciones sobre la educación de profesores y su formación profesional, enfocados a promover el pensamiento matemático en estudiantes de los niveles básico y medio superior. Este encuentro sirvió para crear un plan de colaboración entre académicos de ambas universidades, que incluye la edición de este libro.

[1] En 2013, la Facultad de Educación de la Universidad de Calgary cambió su nombre a Escuela de Educación Werklund.

Además de los académicos de la UPN y la WSE, en el encuentro contamos con la participación de investigadores y estudiantes de posgrado de diferentes instituciones en México, como la Universidad de Querétaro, la Universidad de Zacatecas, la Universidad de las Américas y el Cinvestav. Los temas abordados en las presentaciones del encuentro fueron: discusión de diversas perspectivas de investigación en el desarrollo profesional de maestros de matemáticas; diseño e implementación de programas de formación profesional enfocados a promover el pensamiento matemático; y la integración de las tecnologías de la información y la comunicación dentro de los salones de matemáticas y las prácticas de enseñanza. Adicionalmente, hubo presentaciones magistrales en el tema de educación de los profesores de matemáticas.

A pesar de las diferencias de idiomas, culturas y orígenes sociales entre México y Canadá, en el encuentro identificamos problemáticas comunes a ambos países respecto a la educación matemática y, en particular, a la formación de profesores. En especial, en esta introducción recuperamos las señaladas en las conferencias magistrales. Silvia Alatorre (2013) identificó en su presentación tres temas en común en los dos países: la preocupación por activar el conocimiento matemático formal de los profesores; la creencia de que el conocimiento del contenido y su didáctica no deberían separarse el uno del otro; y la necesidad de una "bisagra" que los una. Por su parte, Brent Davis (2013) describió dos escuelas de pensamiento del conocimiento matemático del profesor: una asume que este conocimiento es formal y explícito, y la otra lo considera tácito y vivido en la cotidianidad de los estudiantes y los profesores. Davis sugirió que el aprendizaje participativo de los profesores de matemáticas debe desarrollar tanto las *explicaciones* del conocimiento matemático como la creación de nuevas posibilidades para los profesores, con raíces en entendimientos y elaboraciones de matemáticas vigentes (p. 12). Estas problemáticas y la naturaleza participativa del aprendizaje de los profesores fueron evidentes también en otras presentaciones, como se puede advertir en las memorias del encuentro (Preciado, Solares, Sandoval y Butto, 2013).

En este libro extendemos y profundizamos las conversaciones en torno a estos temas. Consideramos que los capítulos de este libro contribuyen a la construcción de aproximaciones alternativas y complementarias a los aún dominantes y extendidos métodos mecanicistas y algorítmicos de la enseñanza de las matemáticas. Los diversos autores de ambas instituciones aportan nuevas perspectivas sobre el contenido y la naturaleza del conocimiento matemático, así como el proceso a través del cual dichos conocimientos son desarrollados. Esperamos que estas contribuciones sean de interés para estudiantes de posgrado en educación, formadores de profesores, investigadores y diseñadores de políticas educativas.

El libro se conforma de una introducción, tres partes con sus respectivos capítulos y conclusiones. A continuación, se presenta cada una de esas partes y una breve descripción de su contenido.

Parte I. Qué, cómo y por qué: ¿qué es lo que los profesores de matemáticas deberían saber?

Lo que significa *ser competente en matemáticas* ha cambiado dramáticamente en los últimos 20 años. Los currículos escolares enfocados sólo en desarrollar destrezas procedimentales limitan la habilidad de pensar en situaciones nuevas y no convencionales. Estos currículos escolares, así como las prácticas docentes respectivas, presentan una perspectiva de las matemáticas alejada del pensamiento matemático, en términos de creatividad y pensamiento crítico.

El *Conocimiento matemático especializado para la enseñanza* (MKT, por sus siglas en inglés) es la problemática más prominente abordada en la actualidad por la investigación en educación matemática. ¿Qué conocimiento especializado es necesario para apoyar el pensamiento y el conocimiento matemáticos? Esta parte del libro consta de tres capítulos. En el capítulo I, Lissa D'Amour, Steven Khan, Brent Davis y Martina Metz proponen el pensamiento complejo como un marco para saber y ser dentro de las matemáticas para la enseñanza. Los autores reorientan el conocimiento matemático del profesor desde la articulación e implementación del conocimiento del 'quehacer correcto' hacia una disposición compleja de ser y de saber. En el capítulo II, Martina Metz, Paulino Preciado y Chenoa Marcotte presentan un marco para el diseño de entendimiento matemático profundo, como resultado y herramienta del trabajo realizado durante tres años en un programa de formación profesional. En el capítulo III, Armando Solares aborda el problema del conocimiento matemático del profesor, en el caso particular de las telesecundarias en México. El uso que los profesores dan a los recursos disponibles y las decisiones que toman frente a las problemáticas cotidianas de su práctica son temas que se analizan en este capítulo, el cual presenta un enorme contraste con los contextos escolares urbanos e industrializados y que provee de servicios educativos a una gran parte de la población rural en México.

Parte II. Qué, **cómo** y por qué: ¿cómo se puede apoyar a los profesores para actuar de acuerdo con este conocimiento en su práctica? En este libro compartimos ideas de cómo transformar las matemáticas escolares para alejarse del *modelo industrial de educación* (Gilbert, 2007). ¿Cómo los investigadores y los profesores pueden trabajar juntos hacia dicha transformación? La segunda parte del libro comprende dos capítulos: en el capítulo IV, Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres y María Dolores Lozano Suárez adoptan una perspectiva enactivista para explicar por qué, a pesar de las distintas reformas educativas en México, los profesores no cambian sus prácticas docentes. El texto presenta ejemplos de cómo el trabajo colaborativo entre profesores e investigadores puede propiciar necesidades auténticas de cambio en las prácticas de los profesores. El capítulo V, escrito por Carmen Oliva Gutiérrez Aguilar y Alicia Ávila Storer, presenta una experiencia de formación continua en la que profesores de matemáticas se involucraron en la resolución de problemas matemáticos y el intercambio de ideas para su resolución. Las autoras concluyen que dicha aproximación al desarrollo profesional permite modificar y enriquecer los conocimientos matemáticos y pedagógicos de los profesores.

Parte III. Qué, cómo y **por qué**: ¿por qué el conocimiento y aprendizaje de los profesores es una cuestión crítica?

En la actualidad, las perspectivas del conocimiento y el aprendizaje se encuentran en un debate internacional. Por ejemplo, la UNESCO (2005) describe las *sociedades del aprendizaje* en las cuales los paradigmas de producción, consumo y acceso al conocimiento han cambiado de manera significativa. En el modelo industrial de educación el conocimiento se entiende como 'un objeto' que puede ser transmitido a los estudiantes. En dicho modelo las personas se clasifican de acuerdo con los empleos que ocuparán cuando se integren a la fuerza laboral (Gilbert, 2007; Thomas & Brown, 2011). En contraste, en las sociedades del aprendizaje, el conocimiento se asume como un proceso en el cual la gente y la sociedad aprenden continuamente. Aunque las implicaciones de la adopción de este paradigma en educación sean debatibles, la investigación educativa respalda el alejamiento del modelo industrializado y enfatiza la importancia del *aprender a aprender* y la creatividad. Sin embargo, la transición de un modelo a otro representa un desafío en cuanto a la dificultad de aceptar nuevos paradigmas y prácticas de enseñanza. Los programas de desarrollo profesional de profesores son fundamentales para este cambio. La tercera parte del libro cierra con dos capítulos. En el VI, Brent Davis analiza ideas recientes de aprendizaje sobre cómo los humanos aprenden a través de analogías y metáforas y las contrasta con el paradigma formal de razonamiento deductivo dominante en los programas de estudios de matemáticas. Después de una breve revisión histórica del conocimiento matemático de los profesores, el autor propone el *estudio de conceptos* como una estructura participativa y colaborativa para involucrarse en la examinación y elaboración de entendimientos matemáticos. Finalmente, en el capítulo VII, Krista Francis, Steven

Khan y Brent Davis afirman que cambiar la idea de competencias matemáticas para desarrollar el pensamiento espacial es decisivo para entender, interpretar y crear representaciones de información compleja, característica de la sociedad del conocimiento de hoy en día. En este capítulo se presenta la concepción de un currículum basado en observaciones de niños construyendo robots. Este currículum no sólo representa una nueva aproximación a las matemáticas, sino que también impacta en el conocimiento pedagógico y tecnológico del profesor.

Concluimos esta introducción con comentarios sobre la decisión de escribir el libro en los idiomas de los autores: español e inglés. Siguiendo el ejemplo de revistas de educación, que publican en más de un idioma y para promover el intercambio cultural bilingüe entre los educadores en matemáticas de México y Canadá, presentamos los textos en el idioma en que fueron escritos originalmente. Sólo esta introducción y las conclusiones están escritas en ambos idiomas, así como los resúmenes de cada capítulo. Estructuras similares pueden encontrarse en revistas de educación en Canadá (*Canadian Journal of Science*, *Mathematics and Technology Education*), y en México (*Revista Electrónica de Investigación Educativa*) que publican artículos en más de un idioma. Estamos convencidos de que esta forma de diálogo bilingüe permite construir un terreno fértil para las diversas colaboraciones entre nuestras dos universidades y nuestros dos países.

Armando Paulino Preciado Babb,
Armando Solares Rojas
y *Krista Francis*

INTRODUCTION

The purpose of this book is to provoke a dialogue between teacher educators from Pedagogical National University (UPN), Mexico, and the Werklund School of Education (WSE), formerly Faculty of Education[1], of the University of Calgary, Canada, on **what** mathematics teachers should know, **how** teachers can be supported to enact this knowledge in their practice, and **why** teachers' knowledge and their learning are such critical issues for K – 12 education in both countries.

Preceding this book was the first meeting between the National Pedagogical University and the Faculty of Education of the University of Calgary held in February 2013 at UPN, Ajusco, in Mexico City with the purpose of discussing issues of, and approaches to, teacher education and professional development that is focused on promoting mathematical thinking in K – 12 students. The meeting served to create a plan for academic collaboration among academic staff from both institutions, including the publication of this book.

In addition to academic staff from UPN and WSE, this meeting gathered researchers, professors and graduate students from dif-

[1] The Faculty of Education was renamed to Werklund School of Education in 2013

ferent institutions in Mexico including University of Querétaro, University of Zacatecas, University of the Americas, and Cinvestav. The subtopics addressed through presentations at the meeting were research perspectives on mathematics teacher professional development; design and implementation of teacher professional development programs focused on promoting mathematical thinking; and information technologies within mathematics classrooms and teaching practices. Additionally, keynote speakers contributed to the general topic of mathematics teacher education.

Despite the differences in language, culture and social background between Mexico and Canada, during the meeting we identified common issues in both countries regarding mathematics education, and teacher professional development. In particular, in this introduction we bring back issues highlighted by keynote speakers. In her presentation, Silvia Alatorre (2013) identified three common themes in the two countries: the concern to activate teachers' formal mathematical knowledge; the belief that content knowledge and didactics should not be separate from each other; and the need to find a 'hinge' connecting them. For his part, Brent Davis (2013) depicted two schools of thought for mathematics knowledge for teachers: one assumes this knowledge as formal and explicit; the other is considered tacit, and enacted in the daily life of both teachers and students. He focused on the latter, arguing that this knowledge requires "much more subtle, participatory, and time-extensive strategies" (p. 3). Davis suggested that the participatory learning of mathematics teachers should develop both the 'explicititifications' of mathematical knowledge and the creation of new possibilities for teachers rooted in "understandings and elaborations of extant mathematics" (p. 12). These issues, as well as the participatory nature of teachers' own professional learning, were evident also in other presentations, as it can be seen in proceedings of the meeting (Preciado, Solares, Sandoval, & Butto, 2013).

In this book we extend and deepen the conversations around these themes that arose at the initial meeting. We consider that the chapters in this book contribute to the construction of alternative and complementary approaches to the dominant rote and procedural methods currently found in mathematics teaching. Diverse authors from both institutions provide new perspectives on the content and nature of the mathematical knowledge for teachers, as well as the process for developing such knowledge. We hope that these contributions will inform graduate students in education, teacher educators, researchers, and policy makers.

The book consists of this introduction, three main parts, and a conclusion. Its parts and a brief description of their content are presented as follows.

Part One. What, How, Why: What mathematics teachers should know.

What it means to be *mathematical competent* has changed dramatically in the last 20 years. School curriculums that focus on procedural skills limit the ability to think in novel and non-conventional situations. These curriculums, and their corresponding teaching practices, portray a perspective on mathematics distant from actual mathematical thinking, in terms of creativity and critical thinking.

Specialized mathematical knowledge for teaching (MKT) is the most prominent international issue in mathematical education research at the moment. What specialized knowledge is needed to support mathematical thinking and knowing? This part of the book comprises three chapters. In Chapter I, Lissa D'Amour, Steven Khan, Brent Davis, and Martina Metz propose complexity thinking as a frame for knowing and being with mathematics for teaching. They reorient the mathematical knowledge for teaching from articulating and implementing knowledge of 'right doing,' to a complex disposition for being and knowing. In Chapter II, Martina Metz, Paulino Preciado, and Chenoa Marcotte present a framework for the Design for Deep Mathematical Understanding which is both a result and a tool for the work undertaken in a three-year professional development program. In Chapter III, Armando Solares addresses the issue of mathematical knowledge for teachers in the particular case of 'telesecundaria' in Mexico. Teachers' use of resources and decision making in-the-moment are analyzed in this particular context, which presents strong differences compared to the common school setting, yet provides educational services to a large part of the rural population in Mexico.

Part Two. What, **How**, Why: How teachers can be supported to enact this knowledge in their practice?
In this book, we share ideas on how to transform school mathematics and thereby move away from an *industrialized education model* (Gilbert, 2007). How can researchers and teachers work together towards such transformation? This section comprises two chapters. In Chapter IV, Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres and María Dolores Lozano adopt an enactivist perspective to explain why, despite the multiple educational reforms in Mexico, teachers do not change their practices. The chapter presents examples of how the collaborative work among teachers and researchers can provide authentic needs for teaching practices. Chapter V, written by Carmen Oliva Gutiérrez Aguilar and Alicia Avila Storer, presents an experience of ongoing professional development in which teachers engage in mathematical problem solving and the exchange of ideas for their solution. The authors conclude that such an approach to professional development modifies and enhances teachers' mathematical and pedagogical knowledge.

Part Three. What, How, **Why**: Why teachers' knowledge and their learning are such critical issues.
Currently, perspectives of knowledge and learning have been under international debate. For instance, UNESCO (2005) describes *learning societies* in which paradigms of production, consumption, and access to knowledge have shifted. In the industrialized model knowledge is understood as 'an object' that can be transmitted to students. In this model people are sorted according to their em-

ployment destination (Gilbert, 2007; Thomas & Brown, 2011). By contrast, in learning societies knowledge is a process where people and society learn continually. Though there is a debate on the implications for education of adopting this paradigm, research on education supports the movement away from industrialized models, and stresses the importance of creativity and learning to learn. However, the transition from one model to another represents a challenge in terms of the difficulty of embracing new paradigms and teaching practices. Teacher professional development programs are fundamental for this shift. This third part concludes the book with two chapters. In Chapter VI, Brent Davis looks at recent insights into learning, particularly how humans learn through analogies and metaphors, as opposed to the "rational-deductive" formal paradigm that still permeates mathematics programs of studies. Then, after a brief review of the history of mathematics knowledge for teachers, Davis proposes *concept study* as a participatory, collaborative structure for teachers to engage in the examination and elaboration of mathematical understandings. Finally, in Chapter VII, Krista Francis, Steven Khan and Brent Davis claim that shifting the focus of mathematical competencies to developing spatial reasoning is crucial to understand, interpret and create representations of complex information as found in today's knowledge society. The chapter presents the conception of a curriculum based on observations of children building robots. This curriculum not only represents a new approach to mathematics, but also impacts on teacher pedagogical and technological knowledge.

We conclude this introduction by commenting the decision to write this book in the language of the authors: Spanish and English. Following the example of journals in education that publish in more than one language, and with the purpose of promoting the cultural and bilingual exchange between mathematics educators from Mexico and Canada, the chapters are presented in the language in which they were initially written. Only the introduction and conclusion are written in both languages, as well as abstracts for each chapter. Similar structures can be found in educational journals in Canada (*Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*), and in Mexico (*Revista de Investigación Educativa*) that publish articles in more than one language. We are convinced that this bilingual dialogue facilitates the creation of a fertile terrain for the diverse collaborations between our universities and countries.

Armando Paulino Preciado Babb,
Armando Solares Rojas
and *Krista Francis*

REFERENCIAS / REFERENCES

Alatorre, S. (2013). Un intento de desencadenar conflictos cognitivos en maestros de primaria. In: A. B. Preciado Babb, A. Solares Rojas, I. T. Sandoval Cáceres y C. Butto Zarzar (Eds.), *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*. Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary. http://dspace.ucalgary.ca/handle/1880/49709

Davis, B. (2013). Teachers'-mathematics-knowledge-building communities. In: A. B. Preciado Babb, A. Solares Rojas, I. T. Sandoval Cáceres y C. Butto Zarzar (Eds.), *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*. Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary. http://dspace.ucalgary.ca/handle/1880/49708

Gilbert, J. (2007). Catching the knowledge wave. Redefining knowledge for the post-industrial age. *Education Canada*, 47(3). Retrieved from http://www.cea-ace.ca/sites/cea-ace.ca/files/EdCan-2007-v47-n3-Gilbert.pdf

Preciado Babb, A. P., Solares Rojas, A., Sandoval C, I. T., & Butto, C. (Eds.) (2013). *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*. Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary. http://dspace.ucalgary.ca/handle/1880/49746

Thomas, D., & Brown, J. S. (2011*). A new culture of learning: Cultivating the imagination for a world of constant change. CreateSpace.* Retrieved from http://books.google.ca/books?id=p1tBYgEACAAJ

Sandoval Caesáres I. T. (2013). Tecnologías digitales en prácticas de enseñanza de las matemáticas. In: A. B. Preciado Babb, A. Solares Rojas, I. T. Sandoval Cáceres y C. Butto Zarzar (Eds.), *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*. Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary. http://dspace.ucalgary.ca/handle/1880/49731

UNESCO (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento: Reporte mundial de UNESCO*. UNESCO: París. Consultado en noviembre de 2013 de: http://www.unesco.org/new/en/communication-and-information/resources/publications-and-communication-materials/publications/full-list/towards-knowledge-societies-unesco-world-report/

UNESCO (2005). *Towards knowledge societies: UNESCO world report*. UNESCO: Paris, France. Retrieved in November 2013 from http://www.unesco.org/new/en/communication-and-information/resources/publications-and-communication-materials/publications/full-list/towards-knowledge-societies-unesco-world-report/

PARTE UNO / PART ONE

QUÉ, CÓMO Y POR QUÉ: ¿QUÉ ES LO QUE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DEBERÍAN SABER?

WHAT, HOW, WHY: WHAT MATHEMATICS TEACHERS SHOULD KNOW?

CAPÍTULO 1 / CHAPTER 1

BEING WELL WITH MATHEMATICS-FOR-TEACHING (M4T): IT'S ABOUT KNOWING

Lissa D'Amour, Steven Khan, Brent Davis and Martina Metz

RESUMEN

Tratamos de cuestionar la pregunta: "¿Qué se supone que debemos hacer?" Argumentamos para ello que mientras el enfoque de muchas investigaciones en educación matemática conciernen al *qué* del conocimiento matemático del profesor, quisiéramos abordar las formas en que los profesores asumen ese conocimiento, que es una pregunta del saber por el saber mismo. Ofrecemos el pensamiento complejo como un marco para pensar sobre el conocimiento y el estar sabiendo dentro de las matemáticas para su enseñanza. Consideramos un marco de la construcción del conocimiento como un conjunto de principios investigados que se alinean con sensibilidades complejas y que ofrece un gran potencial para trabajar con los profesores para que aprendan a estar bien dentro de la enseñanza de las matemáticas, es decir, saber de forma diferente.

Abstract

We seek to interrupt the recurrent question: "What are we supposed to do?" We argue that while the focus of much present research in mathematics education concerns the *what* of mathematics for teaching, we might wish to attend to the ways teachers are with such knowledge – that is a question of *knowing* itself. We offer complexity thinking as a frame for thinking about knowledge and being with mathematics for teaching (knowing). We consider a knowledge-building framework as one set of researched principles that align with complexivist sensibilities and that offer strong potential for working with teachers in learning to be well with mathematics-for-teaching [M4T], that is, knowing differently.

Interrupting the Question: What are We Supposed to Do?

Though not particular to math –but perhaps more poignantly felt there where learners seem so problematically parsed into those who can and those who cannot– "the plight of a good many teachers, and teacher educators… seem forever to be stuck in cycles of crisis, reform, and more blame… and [the pursuit of] ways to cure, control, and predict" (Taubman, 2012, p. 182). In this paper and our work, we are mindful to resist occasioning yet another instance of a repetition compulsion.

We seek instead to address and interrupt problematic assumptions residing in the question "What are we *supposed* to do?" The question names an *assumption* as *expectation* that those asking are already *supposed* to have knowledge of particular "right" doing. As it does so, it announces, and possibly laments, the very absence of such knowledge by those asking in the first place. We further locate a disposition of implementation as subtext to the question –where implemented acts are not enactions of knowing selves but rather superficially engaged "doings" grafted onto bodies otherwise unchanged in the doing. We propose a reorienting of M4T *from* a quest for articulating and implementing knowledge of right doing *to* a disposition for being and knowing differently, in and through interactive explorations of co-emergent doing. In short, we turn to the sensibilities of complexity thinking and the exigencies of knowledge building practices as a way of prompting learning bodies and bodies of learners into their own co-evolving differences.

Begin, however, by considering the problem as made evident in the juxtaposition of reform scripts, now 20 years old, against those presently echoing in classrooms of teachers seeking to enact reform as "supposed."

Juxtaposing Scripts

On the question of problem solving, the Alberta Mathematics Program of Studies writes:

> Learning through problem solving should be the focus of mathematics at all grade levels. When students encounter new situations and respond to questions of the type *How would you …?* or *How could you …?*, the problem-solving approach is being modelled. Students develop their own problem-solving strategies by listening to, discussing and trying different strategies.
>
> A problem-solving activity must ask students to determine a way to get from what is known to what is sought. If students have already been given ways to solve the problem, it is not a problem but practice. A true problem requires students to use prior learnings in new ways and contexts. Problem solving requires and builds depth of conceptual understanding and student engagement.
>
> Problem solving is a powerful teaching tool that fosters multiple, creative and innovative solutions. Creating an environment where students openly look for, and engage in, finding a variety of strategies for solving problems

> empowers students to explore alternatives and develops confident, cognitive mathematical risk takers. (Alberta Learning, 2007, p. 6)

Magdalene Lampert (1990) invited readers to consider mathematical knowing and teaching "when the problem is not the question and the solution is not the answer." In describing how she prepared for her lessons, she wrote:

> In setting the topical agenda in any particular lesson… my responsibility was to choose a problem or problems for discussion, and the students' responsibility was to express their interests, questions, and understandings within the domain of the problem…The problems communicated predictable boundaries for the class discussion, enabling students to know what they are supposed to be doing and thinking about during the class period. (p. 39)

Given the above emphases, it is not surprising then that, in our current research context, we find Ms. D.,[1] the school's mathematics coordinating-teacher, searching the new teaching resource for marked instances of problem-solving skill-development. Finding neither lessons explicitly dedicated thus, nor systematically flagged attentions across the resource, she expresses her worry that using the resource will leave children absent problem-solving skills.

Lampert (1990) further noted that the "most important criterion in picking a problem was that it be the sort of problem that would have the capacity to engage all of the students in the class in making and testing mathematical hypotheses" (p. 39). We contrast this with Ms. D. who, considering the day's lesson, plans for activities well within the bounds of what students already know how to do. She decides to change the resource's suggested provocations to activities more familiar. As the lesson plays out, she presses

[1] Ms. D. and the subsequent names of students are pseudonyms intended to preserve the anonymity of research participants.

her Grade 4 students to articulate the ways they completed a task. Though the variance across responses is strikingly trivial, the script continues. Some children wait patiently; others busy themselves building designs. Two students, Joey and Satya, seem to enjoy the opportunity to answer questions. They monopolize the talk, frequently interrupting the teacher, and are called to better behave.

Lampert (1990) offered a typical lesson in her study. In it she modeled talk about thinking by asking, "Can anyone explain what they thought so-and-so was thinking?" and, "Why would it make sense to think that?" (p. 40). Well schooled in what to do, Ms. D. seems to mimic these scripts and others still proliferating across landscapes of best practices (see e.g., Anderson, Chapin, & Connor, 2011). In the following excerpt she is asking her class to explain why the ten–rod is called a ten–rod: "Russell, what do you think about what Joey said? Do you agree? Do you disagree? Can you say what he said in your own words?" But Russell, in Grade 4, is not paying attention. Perhaps that is the reason why Ms. D. calls him to address the question.

"The question, Russell, was why is this called a ten–rod?"

"Because there's ten ones and it makes a rod," Russell responds.

"Shane, what do you think about what Russell and Joey said? You say it in your own words."

Shane says, "It's called a ten–rod because ten of these combined makes ten."

Ms. D. repeats his answer while the students become increasingly distracted. She pauses and, assuming a deliberate, methodical cadence matching the videotaped exemplars in her store of commercially available resources, says: "I'm going to ask all of you who were playing now, who were making buildings and making smiley faces to stop and put your hands on your knees and your eyes up and your ears listening." The structure of the classroom dialogue continues but with increasing attention to correcting student behaviour.

At the end of class she decides to investigate, asking the students what they liked most. I learn that this habit of "reflecting back with students," as she describes it, is one that she frequently uses when she feels that things have not gone as well as she had hoped. Joey and Satya say they learn best by working on the floor with blocks. The others, one-by-one, express a preference for seatwork, saying that they find working on the floor with the manipulatives too boring. Ms. D. reframes the students' responses back to them as evidences of learning styles and emphasizes that different people learn best in different ways.

In debriefing the lesson with Ms. D., we consider that the resource suggested that students show 22 with base-10 blocks and then explore non-standard representations (i.e. using 13 rather than the typical 4 blocks of 2 tens and 2 units). Ms. D. reflects aloud on her choice to change the activity. Confronted and confused by the strangeness of an exploration begun by showing 22 with 13 blocks, she dismisses the activity as being "too hard. It would need a whole lesson to teach."

Later, the student teacher (also present during this videotaped lesson) reports that the particular resource being used in this research school is constraining and procedural.

What Changes, if Anything, When Same Bodies Do Differently?

Spawned by a re-conceptualization of what it might "be" to meaningfully know mathematics in ways useful for an ever-accelerating world of change, the mathematics directives of early 90s reforms (National Council of Teachers of Mathematics, 1989;[2] Alberta Education, 1996) detailed teacher acts intended to shift classroom discourse away from a seeming preoccupation with things "instrumental" (Skemp, 1976), "surface" (Marton & Säljö, 1976), and

[2]Commonly termed NCTM Standards.

trivially rote and procedural (Cobb, et al., 1992) into communal interactions where authentic sense would be made in ways suited to creative demands of unpredictable futures.

Indeed, over the past several months of this early mathematics learning research initiative in one small school, we hear echoes of the various reform scripts (e.g. Boaler, 2002; Cobb, et al., 1992; Lampert, 1990) in the voices of teachers and consultants committed to a "rightness" of inquiry and discovery. Yet, these determinations are spoken in ways and contexts aligned to an overriding rhythm of habits, intentions, and an ethos of dutifully doing as told.

The present program of studies stipulates that

> by decreasing emphasis on rote calculation, drill and practice, and the size of numbers used in paper and pencil calculations, more time is available for concept development. Concepts should be introduced using manipulatives and be developed concretely, pictorially and symbolically (Alberta Learning, 2007, p. 10)

So concerned about anything visibly resembling the now-derided "mindless" rote of yesteryear, the same teachers, just this week, spoke both relief and discomfort in reading dissention in Merttens 1995 paper "Teaching not learning: Listening to parents and empowering children". One teacher said, "I felt relieved reading this article. It gave me permission to do what I think needs doing." Another admitted, "I feel guilty and just close the door to work on number facts." It seems that permission to practice, where that practice is effortful, has not yet "hit the ground." Our teachers are strongly motivated to do what is right, even when that right seems to go against their deep knowing. Has our project been one of telling teachers what to do, where what to do is "not to tell children what to do"?

It has been over 20 years since the most recent rounds of mathematics reforms made their way into the front matters of programs of study in Canada (Alberta Education, 1996, modeled after the American NCTM Standards, 1989) and Mexico (Poder Ejecutivo Federal, 1989), yet the outcomes that follow have little changed. How is it that what was intended as reform seems to have naught but affirmed the adage, "The more things change the more they stay the same"?

Grafting Learning Processes onto Mathematics Content

We speculate as to a problematic misfit evidenced in the intentions of the front matters of curriculum materials and the listing of measurable student outcomes that follow. Teachers do not define the trajectory to be taken across the grades of the given (and ever-evolving) ideation system of mathematics, leastwise not at any macro or meso levels of discernment. That trajectory comes largely pre-ordained for them in the program of studies. And so a question arises here of fit: On what principles have the outcomes in programs of study been designed? What or who determines that a given outcome be more or less complex and better suited for younger children? Despite changes in understanding about how people learn, the course of movement through the discipline of mathematics as defined in curriculum has not appreciably shifted in the past several centuries.

In *Radical Constructivism and Mathematics Education*, Steffe and Kieren (1994) traced the influence of constructivist thought on mathematics educators over the latter half of the 20th century. They noted a Cartesian epistemology and posited an anxiety evidenced in curriculum design where "mathematical structures were regarded as having a mind-independent existence, and the function of rationality was to come to know these fundamental structures" (p. 712). Steffe and Kieren elaborated this point in the following excerpt:

> The fundamental structures of mathematics served as the fixed foundation for most of the developers of the modern mathematics programs. In those cases, we believe that the curriculum developers were, perhaps unin-

> tentionally, entangled in Cartesian anxiety because they conflated mathematical structures and capacities for reason and logic. They apparently felt no necessity to look beyond mathematical structures to investigate what the mathematical knowledge of students might be like (p. 713).

Have the outcomes of mathematics curricula been designed according to a view of mathematics as disembodied pure form and not in terms of how humans enter or make sense of it? Might we consider that the programs of studies as passed down to us since their Cartesian conception and before, do order grade-level content according to what is common and familiar in culture; that is, a curriculum that moves not according to increasing complexity but rather that one that moves according to decreasing cultural familiarity? As it turns out, basic math (as in back-to-the-basics) may well be anything but basic in terms of conceptual accessibility. We note, however, that it is the math "everyone" is supposed (in both meanings of the word) to know how to "do." Given these assumptions it would follow that a proper approach to teaching the "basics" would be through rote and procedural exercises bent on honing familiarity and much less in the direction of conceptual understanding. Given that lists of student outcomes are not about to change any time soon, these observations bear relevance to the kind of knowing that teachers bring to and need to develop in order to teach math well.

Indeed, M4T could be rethought as a way of being with the learner and mathematics, a way that attends to the inseparability of "learning" and "mathematics" as in the reciprocal phrases "learning mathematics" and "mathematics learning." That is, we argue for an entry into the "what" of M4T, not through any recitation of scripts or reenactments of what to do, but rather through an emphasis on knowing that resides at the articulation of learning bodies and bodies to be learned.

Though the focus of much present research in mathematics education concerns the *what* of M4T, our research calls for reconsiderations of that what in terms of *how* to be well with M4T;

that is, doing so in ways that accord with one's ongoing being and becoming. In short, we consider M4T as being less about *having knowledge* and more about the question of *knowing* itself, about teachers transitioning from being *scripted by* to being differently *engaged in* M4T. We offer that a transition to doing less of the same asks for a shift in the way we perceive/conceive and engage the challenges of mathematics learning today. To that end, we propose the re-conceptualization of M4T and the challenge of teachers knowing as considered through a paradigmatically different lens from one that challenges the very fundaments of knowledge out there, of right knowledge to be acquired. Instead, we advance a complexivist frame through which to consider differently.

M4T as Complex Knowing

What is "Complex"?

It is not easy to enter a discussion of complexity, as the word is subject to such diverse interpretations. Indeed, perhaps the most frequently encountered statement in reviews of complex systems research is that there is no unified definition of such key terms as *complex* and *complexity*, even among researchers. Rather than opening with a one-size-fits-all description, then, accounts of complexity research tend to begin by invoking some manner of Aristotle's observation that "the whole can be greater than the sum of the parts." Complexity researchers are interested in those phenomena that do not reveal themselves –and that, in fact, might disintegrate– under the reductive scrutiny of analytic methods.

This is not to say that complex systems researchers are uninterested in constituent parts or governing laws. The point, rather, is that some phenomena manifest traits and capacities that cannot be predicted or explained in terms of components and rules, in part because those complex phenomena change over time. Invoking principles that are more reliant on Darwin than Newton, complex systems researchers investigate both how interacting parts enable systems' global behaviors, and how those systems relate to and interact with other phenomena in their environments. Such emphases are clearly not "new." On the contrary, the first major development in the emergence of complexity research was the recognition that there is a class of phenomena that cannot be understood in terms of simple cause-effect dynamics. In the western world, that recognition was formally announced in the 1800s through the work of Darwin and his contemporaries, but it took more than a century for the sensibility to percolate to and through other branches of academic inquiry.

With that slow percolation, complexity research only cohered as a discernible movement in mathematics and in the physical and information sciences in the middle of the 20^{th} century, with the social sciences and humanities joining in its development in more recent decades. To a much lesser (but noticeably accelerating) extent, complex systems research has been embraced by educationists whose interests extend across such levels of phenomena as genomics, neurological process, subjective understanding, interpersonal dynamics, cultural evolution, and global ecology.

In fact, complex systems research is itself an example of what it studies: an emergent phenomenon in which similar but nonetheless diverse elements coalesce into a coherent, discernible unity that cannot be appreciated as a sum of its constituents. A sense of its internal diversity might be gleaned from some of the varied terms for complex systems that have arisen in different fields, including "complex adaptive systems" (physics), "nonlinear dynamical systems" (mathematics), "dissipative structures" (chemistry), "autopoietic systems" (biology), healthy organisms (health care), "organized complex systems" (information science), social systems (sociology) and simply "systems" (cybernetics) (Mitchell, 2009). This range of titles and interests is both boon and bane. On the positive side, it offers a sense of the breadth of phenomena and diversity of interest that is addressed within discussions of complexity. On the negative, it points to the reason that there is no readily comprehensible, unified description of complexity; rather, researchers tend to structure definitions around their particular research interests, and it is not an exaggeration to suggest these interests span the smallest to the largest and the briefest to the most protracted of phenomena.

Rather than lamenting this tendency toward diverse definition, we find it a useful means to hear deep resonances within the field of mathematics education research. In particular, several theories of learning that have been prevalent for many decades are readily aligned with complexivist sensibilities. For example, one would be hard pressed to find recent research on mathematics learning that is not deeply committed to such notions as co-participation, inextricable entanglements, decentralized structures, co-adaptive dynamics, self-determination, and non-linear unfoldings. But perhaps the clearest evidence of the prevalence of complexivist sensibilities is the frequent usage of the notion of *emergence*, in descriptions of individual learning (e.g. Lesh & Doerr, 2010; van Oers, 2010; Proulx, 2013, Bowers & Nickerson, 2001), the products of mathematical understanding (Cobb, 1999; Font, Godino, & Gallardo, 2013), tools of learning (Hershkowitz & Schwarz, 1999), collective knowledge production (Cobb & Bauersfeld, 1995; Burton, 1999; Davis & Simmt, 2006; Martin & Towers, 2011), teachers' dynamic knowledge of mathematics (Davis, 2011; Davis & Renert, 2014), and the open-ended character of mathematics knowledge itself (Foote, 2007; Hegedus & Moreno-Armella, 2011). Granted, usages of *emergence* are frequently left undefined and relatively few researchers have explicitly likened complex systems to learners (e.g. Wilensky & Resnick, 1999; Stroup & Wilensky, 2000; Davis & Simmt, 2003; Lesh & Doerr, 2010, Kilgore, 1999). However, the frequent use of *emergence* signals an important and broad appreciation of the adaptive, irreducible, unprescribable, yet-coherent natures of knowledge, knowledge production, and knowledge-producing systems.

Or, more concisely, of *knowing*.

Before engaging in a complexity-based reading of a few of the more prominent theories of learning in the field, it is useful to be explicit about some of the key aspects of a complex (learning) form/phenomenon/entity, hereafter referred to simply as a *knowing system*. In brief, a knowing system is a perceptible coherence that

- co-dependently arises with the world in the co-implicated interactions of multiple agents/systems (e.g. neurons, instantiations, schemata, persons, social clusters, subcultures, species),
- is typically conceived/perceived and characterized as a body and/or in embodied terms (e.g. a person, a body of knowledge, a social corpus, the body politic),
- manifests features and capacities that are not observed in constituting agents/systems,
- maintains itself over some period of time, and
- evolves in response to both internal and external dynamics in manners that are better described in terms of adequacy/sufficiency (i.e. fitness among subagents and between agent and environment) than optimality/efficiency (i.e. match between internal and external).

KNOWLEDGE BUILDING

What is Knowledge Building?

Scardamalia and Bereiter's (2010) theory of knowledge building explicitly recognizes the complex, self-organizing nature of knowledge creation. In their work,

> [s]elf-organization and emergence are recognized at all levels from the neural to the cognitive to the socio-cognitive and on up to the epistemic,

> where it is ideas themselves that interact to form more complex ideas. We predict that eventually all learning, cognitive, and educational theories will be reconstructed on the basis of self-organizing systems concepts; Knowledge building theory is no exception and more amenable to such reconstruction (Scardamalia & Bereiter, 2010, p.12).

Intentionality and community knowledge are two of the characteristics that distinguish Knowledge Building (KB) in educational contexts from related constructivist learning discourses (Scardamalia & Bereiter, 2010). Individuals in KB communities are consciously aware of the process in which they are engaged, and as such their decisions are intentional and deliberate and are oriented to and by a commitment to the sustained efforts required to systematically benefit, advance and improve the communal collective(s) of knowers through iterative improvements to the quality of the knowledge resources and artefacts they are able to access and deploy. More succinctly, "Knowledge Building is the creation and improvement of knowledge of value to one's community" (p. 8). It is the main activity of a Knowledge Building culture.

At present, 12 Knowledge Building principles have been explicitly identified (Scardamalia & Bereiter, 2006, 2010; Tarchi et al., 2013). These principles can serve multiple purposes which include functioning as design parameters for prompting pedagogical decision making and grounds from which practices can be evaluated. They form an interconnected system that offers pragmatic advice for the emphases to which individuals and groups committed to transforming themselves into a knowledge-producing collective might choose to attend more deliberately, and are not intended as a checklist to be implemented. The 12 principles are: Real Ideas / Authentic Problems, Improvable Ideas, Idea Diversity, Rise Above (i.e. to more inclusive principles), Epistemic Agency, Community Knowledge, Democratizing Knowledge, Symmetric Knowledge Advancement (i.e. distributed expertise), Pervasive Knowledge Building, Constructive Use of Authoritative Sources, Knowledge Building

Discourse, and Concurrent, Embedded, and Transformative Assessment. Though space does not permit a detailing of the specifics of each of these and their complex inter-relationships, it is useful to point out that, collectively, these principles can be thought of as setting some 'initial conditions' from which a complex disposition—a way of knowing that actively engages different learning bodies and bodies of learning—has a high probability of successfully emerging. In the specific context of our ongoing work with teachers of learners of mathematics, we frame this disposition, or knowing, as a being well with M4T.

What Does Being Well With M4T Entail?

In contrast to a narrow focus on the acquisition of proficiency with isolated rules, concepts, and procedures, a goal of intentional instruction in mathematics in school can be framed as the development of healthy 'mathematical dispositions' (De Corte, 2004). According to De Corte, Verschaffel and Op' T Eynde (2000), the components of such a disposition include: mastery of domain specific knowledge, mastery of heuristic strategies, meta-knowledge proficiency, self-regulatory skills and positive mathematics related beliefs. This is consistent with a view of mathematics as "a set of human sense-making and problem-solving activities based on mathematical modeling of reality" (De Corte, 2004, p. 280).

At our scale of interest - teacher education - we have framed the types of dispositions of teacher-learners that might lead to healthy mathematical dispositions amongst their students as a being well with M4T. In doing so, we are not discarding the various types of knowledge identified as needed and enacted by teachers (e.g. Shulman's Seven types); rather, we have drawn upon research on general expertise, on expertise in teaching and on particular expertise for mathematics teaching (Brown & Coles, 2011; Davis & Renert, 2014; Li & Kaiser, 2011). From this literature, we note that a common feature of expertise is a certain productive, though not necessarily easy, way of being with the particular knowledges necessary for success and exemplary action in the domain of practice over a prolonged period of time. We do not take such dispositions as being innate individual characteristics but as co-emerging with sustained effortful and deliberate practice in growth-minded oriented communities.

Conclusion: Being Well With M4T

In problematizing teachers' efforts to do "what they are supposed to," we propose a shift in describing *what* teachers need to know in terms of *how* that knowledge develops; i.e. in terms of emergent knowing. Here, mathematics and knowing converge; "knowing mathematics" and "mathematics knowing" emerge as tautologies describing complex learning bodies and bodies of learning. Framed this way, the principles of knowledge-building offer a way forward that facilitates being well with M4T:

> …in a healthy Knowledge Building culture, the shared goal of advancing a knowledge frontier has dissatisfaction with the current state of ideas as a presupposition. There is no need to induce cognitive conflict; the need to improve existing ideas is constitutive of the community, it is why the community exists in the first place (Scardamalia & Bereiter, 2010, p. 11.)

References

Alberta Education, Curriculum Standards Branch. (1996). *Alberta program of studies for K-9 mathematics : Western Canadian protocol for collaboration in basic education.* Edmonton, AB: Author.

Alberta Education. (2007). *Mathematics kindergarten to Grade 9 program of studies*. Edmonton, AB: Author. Retrieved from http://education.alberta.ca/media/645594/kto9math.pdf

Anderson, N. C., Chapin, S. H., & O'Connor, C. (2011). *Classroom discussions: Seeing math discourse in action, a multimedia professional learning resource*. Sausalito, CA: Math Solutions.

Boaler, J. (2002). Learning from teaching: Exploring the relationship between reform curriculum and equity. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 239-258.

Bowers, J., & Nickerson, S. (2001). Identifying cyclic patterns of interaction to study individual and collective learning. *Mathematical Thinking and Learning*, *3*(1), 1-28.

Brown, L. & Coles, A. (2011). Developing expertise: How enactivism re-frames mathematics teacher development. *ZDM 43*, 861-873.

Burger, E.B., & Starbird, M. (2005). *The heart of mathematics: An invitation to effective thinking* (2nd Ed.). Emeryville, CA: Key College Publishing

Burton, L. (Ed.). (1999). *Learning mathematics: From hierarchies to networks.* London, Flamer.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematics Thinking and Learning, 1*(1), 5-43.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *Emergence of mathematics meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, *28*, 573-604.

Davis, B. (2011). Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge. *Science*, *332*, 1506-1507.

Davis, B., & Renert, M. (2014). *The math teachers know: Profound understanding of emergent mathematics*. New York: Routledge.

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2) 137-167.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology: An International Review, 53*(2), 279-310.

De Corte, E., Verschaffel, L and Op'T Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and goal of mathematics education. In M. Boekarts, P. R. Pintrich & M. Zeidner, (Eds.) *Handbook of self regulation* (pp. 687-726). San Diego: Academic Press.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124.

Foote, R. (2007). Mathematics and complex systems. *Science*, *318*, 410-412.

Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics*, *77*, 369-388.

Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (1999). The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of socio-mathematical norms. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 149-166.

Kilgore, D. (1999) Understanding learning in social movements: A theory of collective learning. *International Journal of Lifelong Education*, *18*, 191-202.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, (27)*1, 29-63.

Lesh, R., & Doerr, H. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving learning and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Li, Y. & Kaiser, G. (eds.) (2011). *Expertise in Mathematics Instruction*. New York: Springer.

Martin, L. C., & Towers, J. (2011). Improvisational understanding in the mathematics classroom. In R. K. Sawyer (Ed.), *Structure and improvisation in creative teaching* (pp. 252-278). New York: Cambridge University Press.

Marton, F. & Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning: I-Outcome and process. *British Journal of Educational Psychology, 46*, 4-11.

Merttens, R. (1995). Teaching not learning: Listening to parents and empowering children. *For the Learning of Mathematics, (15)*3, 2-9.

Mitchell, M. (2009). *Complexity: A guided tour*. Oxford, UK: Oxford University Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation* standards for school mathematics. Reston,VA: Author.

Poder Ejecutivo Federal (1989). Programa para la modernización educativa 1989 - 1994. México, D.F., México: Poder Ejecutivo Federal. Retrieved from http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/inea/frames.asp?page=36&id=109

Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics*.

Scardamalia, M. & Bereiter, C. (2006). Knowledge building: Theory, pedagogy and technology. In K. Sawyer (Ed.), *Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 97-118). New York: Cambridge University Press.

Scardamalia, M. & Bereiter, C. (2010). A brief history of knowledge building. *Canadian Journal of Learning and Technology 36*(1). Retrieved from http://www.cjlt.ca/index.php/cjlt/article/view/574/276

Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, (12)*2, 88-95. (Original work published 1976)

Steffe, L. P. & Kieren, T. E. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 711-733.

Stroup, W.M., & Wilensky, U. (2000). Assessing learning as emergent phenomena: Moving constructivist statistics beyond the bell curve. In Kelly, A.E., & Lesh, R.A. (Eds.), *Handbook of Research in Mathematics and Science Education* (pp. 877-911). Mahwah, NJ: Lawrence Erbaum Associates.

Tarchi, C., Chuy, M., Donoahue, Z., Stephenson, C., Messina, R. & Scardamalia, M. (2013). Knowledge building and knowledge forum: Getting started with pedagogy and technology. *Learning Landscapes, 6*, 385-407. Retrieved from http://www.learninglandscapes.ca/images/documents/ll-no12/tarchi.pdf

van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 23-37.

Wilensky, U., & Resnick, M. (1999). Thinking in levels: A dynamic systems approach to making sense of the world. *Journal of Science Education and Technology*, *8*(1), 3-19.

CAPÍTULO II / CHAPTER II

DESIGNING FOR DEEP MATHEMATICAL UNDERSTANDING: REFLECTIONS ON THE DESIGN AND IMPLEMENTATION OF A FRAMEWORK FOR TEACHERS

Martina Metz, Paulino Preciado,
Chenoa Marcotte

RESUMEN

En este capítulo presentamos el trabajo "Diseño para el entendimiento matemático profundo", desarrollado para la Galileo Educational Network Association, con el fin de apoyar a los profesores en la escuela donde trabajan para que involucren a sus estudiantes en experiencias matemáticas más auténticas, durante un programa de formación docente de tres años. En el análisis de entrevistas con profesores al final del programa, notamos que los ayudó a: 1) atender aspectos de actividades que promovieron la investigación en matemáticas, y 2) apreciar la importancia de la comunidad matemática para profundizar el entendimiento en matemáticas.

Abstract

In this chapter, we present a framework for "Designing For Deep Mathematical Understanding" developed for the Galileo Educational Network Association to support teachers in a school, working to engage their students in more authentic mathematical experiences in a three-year professional development program. In an analysis of interviews with teachers at the end of the program, we noted that it helped teachers to: 1) attend to aspects of tasks that sponsored mathematical inquiry; and 2) appreciate the significance of mathematical community in deepening mathematical understanding.

Knowing Mathematics for Teaching

Deciding what mathematical knowledge teachers require for teaching mathematics depends in part on perceptions of what it means to learn mathematics. We share the view of many mathematics education researchers and practitioners who have long advocated encouraging students to "do mathematics." This entails a conception of teaching that includes but goes beyond reproducing preestablished knowledge; rather, mathematical knowledge is seen as co-created with students in the classroom. Mason, Burton, and Stacey (2010) described *mathematical thinking* as an iterative process entailing: a) specialization and generalization, b) conjecture and verification, and c) reflection and extension. As students engage in this process, they work and think like mathematicians. In this view, teaching involves dealing with unforeseeable, contingent situations in the classroom; doing so includes "attending to students' questions, anticipating some difficulties and dealing with unexpected ones, taking advantage of opportunities, making connections, and extending students' horizons beyond the immediate tasks" (Rowland & Zazkis, 2013, p. 138).

The mathematical knowledge required for best teaching practices has been widely studied for more than four decades. Most recently, Davis and Renert (2014) described a shift from "what" teachers should know to "how" they should know it. They argued that "mathematics-for-teaching is more about an *open disposition to emergent mathematics* than it is about mastery of any specific body of knowledge" (p. 106; emphasis added). More specifically, it attends to the evolution of concepts (p. 75). They further described mathematical concepts as either *formal* or *cultural.* While formal mathematics is about formal definitions and concepts developed as a body of knowledge and written in textbooks as fixed and prescribed, cultural mathematics includes "the analogies, metaphors, applications, systems, discourses, and practices that relate to mathematics, but are not traditionally seen as formal mathematics" (p. 105). When the teacher is open to co-construct mathematical knowledge with students, both formal and cultural mathematical concepts emerge iteratively as students progress through grade levels.

Preparing teachers to act in-the-moment when they are planning or leading a mathematics lesson is also related to assessment in the sense of ongoing feedback that informs learning, or assessment-for-learning. Friesen (2009) proposed a framework for teaching effectiveness in which teachers are considered designers of inquiry-based learning environments in which assessment plays a central role: "Assessment should make up a large part of the school day, not in the form of separate tests, but as a seamless part of the learning process" (p. 5).

We present the Design for Deep Mathematical Understanding (DDMU) framework in this chapter as both a tool for, and an outcome of, our work; it was produced for and with teachers and used to support the decisions involved in planning and enacting tasks to prompt mathematical learning in their classrooms. Throughout our work as Galileo Educational Network Association (GENA) mentors, we (Martina and Chenoa) tried to broaden teachers' perceptions of mathematical knowing relevant to the ways they designed and implemented mathematical tasks; i.e. the framework was intended as a guide for teachers as they developed and/or adapted learning tasks and as they engaged in the tasks themselves. The framework was particularly useful in helping teachers respond differently to student questions and difficulties, and in prompting awarenesses that allowed teachers to take advantage of mathematical opportunities that emerged in-the-moment. This attention to *how* mathematical knowing is held is key to how we situate our work within the broader realm of mathematics for teaching. For instance, by prompting awareness of opportunities for reasoning, modeling, and problem solving, we hoped to trigger an ongoing mode of engagement with mathematics that served to create evermore connected mathematical understanding, which in turn would further occasion the emergence of new insight.

In broadening the scope of what teachers attended to, we also hoped to impact the ways teachers assessed mathematical knowing, again primarily in the sense of how they provided ongoing feedback. Teachers at the school were required to provide written descriptions of students' progress within particular categories, and we intentionally aligned the descriptors of the DDMU framework with these categories. In Part 2 of this chapter, we describe how the interaction of the reporting categories, teachers' goals, and our own understanding of what is significant in prompting mathematical engagement resulted in the DDMU. In Part 3, we share selected excerpts from teachers' interviews that describe their experiences of using the framework.

Developing the Framework

We initially developed the DDMU framework in response to our interactions with a particular group of teachers. In Table 1 we present the iteration of this document corresponding to the time of writing; further versions are available on the Galileo website (GENA, 2014). Over the course of the first two years of our work with the teachers, we typically tried to engage them all in the same tasks with the aims of: a) deepening their own mathematical understanding, and b) providing common ground for discussion of what strong mathematical inquiry might entail. From the beginning, teachers showed considerable interest in moving beyond strictly procedure-based math and many had already taken important steps to do so. Many, however, had been frustrated by experiences with tasks that, while interesting, did not seem to them to address curriculum goals. At the beginning of the third year, teachers expressed a desire to work with material that was more directly relevant to what they were doing in their classrooms at a particular moment in time. We wanted to support them in this but also needed to find sufficient common ground among the (Grades 4-9) teachers to enable meaningful conversation among them. The DDMU framework laid out common goals and terminology that made it easier to facilitate these interactions.

The basic structure for the framework began as a loose association between Kilpatrick, Swafford, and Findells' (2001) strands of mathematical proficiency – i.e. conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning, and productive disposition – and the school's reporting categories: inquiry, knowledge, communication, community, and work habits. We hoped that by describing mathematics in terms of categories that the teachers were already required to assess, it would be easier for them to engage deeply with the observations we were asking them to make and that these observations would help them complete an important and time-consuming task in the life of a teacher at this school: i.e. reporting on student progress.

Designing for Deep Understanding in Mathematics

Inquiry

Reasoning & Proof

- Develops mathematical conjectures; e.g. notes patterns and attempts to explain why they are true
- Attempts to generalize; i.e. tests examples and counter-examples; considers under what conditions a statement or method is valid, possibly by testing extreme and/or special cases;
- Distinguishes between necessary and possible statements

Problem Solving

- Develops a plan, modifies it as needed, simplifies if possible;
- Identifies sub-problems and relates them to each other and to the main problem;
- Considers strengths and weaknesses of various strategies
- Considers similarities and differences between different strategies, different problems, and variations of a particular problem

Modeling / Mathematizing

- Describes situations mathematically by selecting relevant aspects of a situation and describing them with some form of mathematical symbol system
- Considers strengths / weaknesses of model
- Generalizes models of individual situations to models that work in a variety of situations

Knowledge

Procedural Competence

- Distinguishes between aspects of procedure that are necessary and those that are arbitrary (i.e. agreed-upon conventions)
- Compares effectiveness of invented strategies with conventional procedures (there is often a trade-off between transparency and efficiency)
- Uses efficient procedures appropriately and accurately (note contrast with mathematizing above).
- Considers reasonableness of answers
- Applies known procedures appropriately

Conceptual Understanding (big ideas):

- Understands connections between various mathematical topics (e.g. connections between multiplication and division; linear relations and proportionality)
- Systematically explores variations of a particular concept; considers which dimensions might vary and to what degree.
- Attends to and resolves discrepancies between aspects of understanding

Mathematical Work Habits

- Considers alternative ideas
- Tolerates ambiguity
- Willing to try own ideas before seeking help
- Engages in a state of flow, characterized by extended periods of deep thinking
- Experiences "aha!" moments that are often characterized by the excitement of trying to communicate ideas to the teacher or other students; e.g. involving loud expressions accompanied by bodily movement
- Appreciates elegance; i.e. the appeal of simple but powerful arguments that help with solving problems or understanding mathematical concepts

Designing for Deep Understanding in Mathematics
Mathematical Community • Contributes to class and small group discussions re: the development of ideas and the collaborative solving of problems • Builds on the ideas of others by actively seeking to connect contributions to what others have said or done (This goes with….; I agree with….; I disagree with…; I think I see what … means by …; Another way of saying that might be….) • Respects other people and ideas; i.e. works hard to understand other views (asks questions, paraphrases, etc.) **Communication** • Shows work (uses writing, charts, diagrams, models, etc.) • Organizes complex ideas so they can be clearly articulated and/or illustrated • Uses appropriate mathematical terminology and notation to express their ideas

Table 1. *The "Designing For Deep Understanding in Mathematics" framework* (GENA, 2014; Reprinted with permission.)

Attending to Inquiry

The school's reporting categories arose from attempts to draw more explicit attention to modes of inquiry in each of the academic disciplines. Prior to the work discussed here, the school had separated inquiry and knowledge in their reporting categories (for all subjects). This was not intended to suggest that knowledge could be developed separate from inquiry or that inquiry was not about developing knowledge. It was hoped, however, that the somewhat artificial separation would broaden teacher attention beyond attempts to impart pre-defined, static, and (in mathematics) largely procedural knowledge. With inquiry in its own assessment category, assessment of mathematical competency could not rely exclusively on procedural competence, even if students were expected to understand how and why those procedures worked.

Throughout our time at the school, we worked primarily with teachers to develop thought-provoking, generative problem spaces; we did not have the opportunity to be present in classrooms. We hoped that by working with teachers to design problem spaces within which particular competencies were required, teachers' attention might be better primed to notice ways that students used them; again, we hoped to draw attention to significant mathematical ways of being that emerged in the context of rich tasks.

Using the DDMU framework as a guiding document, we met separately with each grade-level teaching team (consisting of two teachers) to work through mathematical tasks that teachers planned to take up with their students. In some cases we suggested the tasks, and in others the teachers brought forward ideas of their own that they wanted to try. In both instances, we attempted to engage teachers in exploring mathematical potentials that might otherwise have gone unnoticed. Following these initial meetings, the teams introduced the tasks to their students. Each team gathered evidence of student learning (e.g. written work, video-taped discussion) to share with the other teams at a large-group meeting. During these meetings, we used the DDMU framework as a lens to guide our discussions, reflections, and considerations of next steps. We repeated this iterative cycle three times over the course of the year.

Broadening Perceptions of Reasoning and Context

In describing mathematical inquiry, we hoped to draw attention to two key ideas that seemed to us to be impeding deeper understanding: 1) the conflation of a (sometimes) narrow view of problem solving and reasoning, and 2) problematic definitions of "good context."

For some teachers, problem solving provided opportunities to assess inquiry, and there was insightful talk detailing how students developed and compared diverse strategies. In many cases, however, what teachers referred to as problem solving involved little more than knowing when to apply previously learned procedures. Also, it seemed that mathematical reasoning and problem solving were sometimes lumped together, typically at the expense of reasoning.

To further confuse matters, there were instances where reasoning was conflated with "reasonable"; i.e. if students were considering the reasonableness of their answers, they were using mathematical reasoning. While true to a certain extent, this is a limiting definition of reasoning. In an attempt to extend perceptions of reasoning, we proposed a definition of reasoning that attended to forming and testing mathematical conjectures, generalizing developing ideas to ever-expanding contexts, and distinguishing between what is necessary and what is merely possible (as in Table 1). Such notions seemed lofty to some, so we tried to emphasize ways they might be found in familiar mathematical spaces. Opportunities to use and develop strong reasoning could be found by shifting attention to when and how it was important and already being used implicitly. For example, most students who understand that the area of a rectangle can be found by *lw* can readily see that a rectangle cut in half diagonally produces a triangle whose area can be described by ½*lw:* But does this apply to *all* triangles?

Influenced by Kilpatrick, Swafford, and Findell's (2001) distinction between adaptive reasoning and strategic competence, we contrasted our consideration of mathematical reasoning with the strategic competencies collected under the more familiar (to the teachers) label of problem solving. The separation is not clean: Considering "similarities and differences between different strategies, different problems, and variations of a particular problem" (GENA, 2014, p. 1) are also significant to considerations of generalizability, which we described as an aspect of reasoning. As with the separation of knowledge and inquiry, however, putting reasoning in its own category helped emphasize aspects of reasoning that tended to be overlooked.

The teachers at the school all taught both mathematics and science. Many expressed strong interest in working with tasks that acknowledged the connection between these disciplines. In doing so, they often described "good contexts" solely in terms of whether they provided opportunities for applying mathematical formulas and procedures rather than for their potential to evoke the emergence of mathematical concepts and ways of being. We emphasized a distinction between applying teacher-given procedures to solve a mathematical problem on the one hand, and modeling or mathematizing on the other. For example, when students mathematize, they describe a situation in ways that make particular relationships more apparent. They might draw a graph, write an algebraic expression, or assign categories but they do so *to make sense of something*, not just to practice using a pre-determined algorithm, formula, or procedure. Here we drew on Lesh's work to distinguish mathematical modeling from traditional problem solving (*cf.* Lesh & Harel, 2003) and Fosnot's descriptions of mathematizing at the K-6 level (Fosnot & Dolk, 2002). Dan Meyer's (2012) description of the "ladder of abstraction" was also helpful in clarifying the distinction between mathematizing and merely applying mathematical procedures, particularly since many of the teachers admired his work and followed his blog.

To help teachers consider context in terms of its potential for providing opportunities for reasoning, problem solving, and mathematizing, we encouraged them to ask two key questions of the mathematical tasks they were developing (sometimes independently and sometimes with the support of GENA mentors) for their students:

- How does a particular context inform the *development* of the mathematics?
- How can the mathematics developed within a particular context (whether it be rooted in science, pure math, or whatever) be generalized/refined/expanded to be more broadly applicable?

By defining inquiry in terms of reasoning, problem solving, and modeling, we hoped to draw attention to aspects of mathematics that allowed consideration of more than procedural competence and conceptual understanding.

Reconsidering Knowledge

In using the DDMU with teachers, we found that while inquiry now received a great deal of attention, describing "knowledge" solely in terms of procedural competence and conceptual understanding still seemed to imply that it could be developed separately from the processes of inquiry. We have since elaborated the descriptors for knowledge in ways that we hope more strongly emphasize how knowing emerges from the processes of inquiry. In particular, we invoked Hewitt's (1999) distinction between what is arbitrary and necessary in mathematics, emphasizing the need to *explicitly* recognize that some mathematical knowledge is purely conventional.

We also noted a trade-off between efficiency and transparency that often becomes apparent when students use their own strategies to solve a problem. Their early attempts to develop procedures tend to be cumbersome. With appropriate feedback, though, many such strategies do work and can be used as bridges to conventional procedures.

Finally, we drew on Donovan and Bransford's (2005) work with "engaging resilient preconceptions" to elaborate ways of deepening conceptual understanding. While these recommendations were aimed at teachers, we included responsibility for noting and resolving discrepancy in our list of indicators in the DDMU framework; we felt that this was a mathematical habit in which students should regularly engage.

Mathematical Community, Work Habits, and Communication

As we developed the DDMU framework, we hoped to support teachers in their (in some cases considerable) efforts to enrich descriptions of work habits, community, and communication (the other three reporting categories used by the school) beyond staying on task, sharing politely, and showing work in a neat and organized fashion. While these are important, we invited further consideration of how each category might be described so as to more directly support the evolution of mathematical understanding. For example, we thought it important to emphasize habits of mind such as tolerating ambiguity and being willing to consider diverse ideas rather than merely staying on task. Further, a mathematical community must do more than provide opportunities for students to publicly share their ideas: it should be a place where those ideas interact and evolve (Davis & Simmt, 2003). For this to happen, teachers must thoughtfully structure the way students share their ideas and help them develop strategies for questioning and responding to one another. Finally, although we supported attention to neatness, organization, and correct terminology, we emphasized that students should first be allowed to develop ideas and work with concepts before attending to labels for those ideas and concepts.

The categories of the DDMU framework served as a point of discussion between the teachers and GENA mentors throughout the third year of the program. To varying degrees, teachers used the criteria outlined within it to select and adapt tasks, to guide the ongoing evolution of mathematical understanding as it emerged in their classrooms, and to talk about and assess student knowing. How the teachers described their experiences of doing so is the focus of the next section.

Teachers' Experience of the Framework

At the end of the third year, all twelve teachers involved in the program agreed to be interviewed. With the exception of one teacher whose partner was unable to attend, interviews were held with pairs of partner teachers co-teaching the same grade level, with six interviews in total. We used a phenomenographic approach (Marton, 1981; Sin, 2010) to identify and describe different teachers' experiences of how their collaboration with GENA mentors was implicated in their deepening understanding of mathematics for teaching (see Preciado-Babb, Marcotte, & Metz, 2013). Here, we attend particularly to teachers' comments regarding their experiences of using the DDMU framework.

While Chenoa and Martina were the GENA teacher mentors during the project, Paulino attended sessions with teachers during the last year to become familiar with the professional learning initiative they were engaged in. The semi-structured questions for the interviews were designed collaboratively with other professors in the Faculty of Education at the University of Calgary. The questions are summarized in Table 2. The "Strong Work in Mathematics" document mentioned in the interview protocol evolved into the DDMU framework described in this chapter.

Interview Protocol
Over the past one/two/three years, you have participated in some version of lesson study with Galileo. Is there a moment that stands out for you as having contributed to your understanding of teaching and learning math? Any others? (Teachers may wish to refer to the attached summary to help jog their memory.)
What types of (mathematical, pedagogical) discussions were held in the lesson study with Galileo?
What other types of PD (pertaining to mathematics teaching) have you participated in?
How did these experiences contribute to your understanding of teaching and learning mathematics?
How would you describe a "good problem"? How have you adapted problems so that they better fit your criteria for "good"? Has this description changed over the time you worked with Galileo?
Refer to the "strong work in mathematics" [i.e. DDMU] document. How has your understanding of these categories shifted over time? Are there ways in which you find the categories limiting?
What will you do or stop doing in your own practice as a consequence of participating with Galileo?

Interview Protocol
Consider one of the problems you developed over the course of the year. Do you think this is a rich mathematical task? What are the features that make this task a rich mathematical problem?
How did you know when students were engaged in mathematical thinking while working on this problem? Provide some examples.
What approaches did students use to solve the problem? What misconceptions became evident as students worked on the problem? How did you address these misconceptions?
What did you learn about teaching mathematics and/or how did you deepen your own understanding of mathematics by using this task in your classroom?

Table 2. *Interview Protocol.*

Paulino, who did not participate as a teacher educator, conducted the interviews. Teachers were provided with the questions in advance to give them time to reflect on their answers. Due to staffing changes at the school, not all of the teachers were involved in this particular professional learning initiative for the full three years. However, all but one of the teachers participated throughout the third year, when the DDMU framework played a key role.

Interviews were professionally transcribed, and we compared the transcriptions with the original audio recordings to ensure accuracy. Each one of us independently re-read the transcriptions to identify overall themes and then came together as a team to discuss them. In doing so, we agreed that the impact of the DDMU was apparent and we identified two predominant themes regarding its use: 1) The framework helped teachers to define strong mathematical inquiry more clearly; and 2) It highlighted for participants the importance of developing a strong mathematical community in their classrooms. We note that our data is limited to teachers' perceptions of the impact of the DDMU, as recorded in the interviews. Although we were not present in classrooms, our interview questions directed attention to particular tasks and to perceptions of student mathematical work and thinking, and we tried to evoke descriptions of particular experiences.

Attending to Strong Mathematical Inquiry

Based on teachers' reflections in the interviews, we found evidence suggesting that the framework assisted teachers in noticing and talking about strong mathematical inquiry. More specifically, the DDMU assisted teachers in: 1) selecting and/or designing tasks; 2) adapting tasks so that they provided more opportunity for mathematical inquiry; 3) responding to evolving mathematical knowing in the act of teaching, and 4) referring explicitly to aspects of inquiry in conversation with their students. We elaborate on each of these points in this section, using selected quotations from the interviews to exemplify teachers' connections between practice and the DDMU.

Selecting better tasks

In discussing task selection, most teachers made reference to the distinction between procedural competency and conceptual understanding: Teacher 1 made explicit reference to a shift in practice from teaching problem solving as a series of prescribed steps that students were asked to follow, to viewing problem solving as offering a space where students could explore their own strategies:

> There were a lot of conversations about just how do we get–well, what do we have to actually figure out to do the rest of the problem. So we had taught area beforehand to do this problem, which I won't necessarily always do. I think that's kind of one of those open-ended things: Give them a problem before you've really taught the concept, and see if they can figure out a way to do it.

Most teachers also referred to the importance of using mathematical problems with multiple solution paths and/or multiple entry points for students at various levels of competence with respect to a particular problem; i.e. the problem solving aspect of inquiry in the DDMU.

Teacher 8 described how her practice shifted from pre-teaching procedures and concepts that could then be applied in problem-solving situations to using tasks with the potential to develop deeper conceptual understanding:

> The longer I teach, the more that my practice is rooted in the problem solving and the conceptual understanding - like the procedural understandings come from the problems instead of teaching procedure and teaching concepts and then solving problems… We uncover concepts [in class] and then we discuss the concepts and what they [students] learn from the problem about that concept instead of, "Well this is how you do it."

While she did not directly credit the framework for this shift, she emphasized its importance in providing clear criteria for discussing strong work in mathematics with her students. Conversely, Teacher 7 described a rich problem in terms of the insight it allowed into student thinking; i.e. a good problem is one that "gives you a lot to assess - how they're thinking, how they're communicating, and you can't just do a worksheet if you're going to compare the two."

Adapting tasks

Related to the selection of a mathematical task was the adaptation of mathematical problems based on the DDMU framework. Some teachers found mathematical problems in books, websites or even social networks and then adapted them to suit the needs of their students. Teacher 1 explained that the framework helped him to see how modifying a problem slightly could broaden the possibilities it afforded for mathematical inquiry:

> So I think a lot of that has to do with [the framework]. How can we engage them and have them come from a variety of levels, from different mathematical understanding? […] How can we make it [the task] more open so that everybody can approach it from some level? ... I think it was just

> how even recognizing some of the different concepts that come from a problem because that problem was basically just about area and perimeter, but then it worked into things like the conjectures and following step by step and having to actually physically show what they were doing to things to scale. It seemed like a fairly simple problem to begin with but then once you actually gave it to the kids to explain it to other people, it changed into something different.

The problem Teacher 1 refers to here was initially about calculating several areas and perimeters using direct information from a drawing. After exploring this problem more deeply with Galileo's mentors, he designed a new version based on the criteria specified in the framework (Preciado, Metz, & Marcotte, 2013).

Responding to evolving mathematics

Teachers also commented how the DDMU framework helped them to develop a more responsive pedagogy as they attended to the emergence of mathematical work that came forth from their students, i.e. as they carefully listened and responded to students' ideas and approaches. Teacher 10 noted that the framework prompted her to take the time to enter into rich mathematical discussions with students, as it was through the discussions that students were able to demonstrate key characteristics of strong mathematical inquiry:

> [T]he discussions that you have with the students definitely accomplishes a lot of these things such as reasoning, modeling, considering alternative ideas. … If anything it [the framework] encourages you to do those things, which are characteristics of strong mathematics.

Teacher 2 went further in explicitly recognizing a shift in what she noticed and responded to as she and her partner worked with the students:

> So now any time that we work through a problem with the class, we see ALL of these things in what our students are doing. Um.... I think that what has been really particularly valuable for me [is that I] have opened my perspective of what I'm looking for in mathematics to all of the things that are listed here [in the DDMU framework].... Previously it might have just been procedural competence. And now it's... um... communication. And making connections. Um.... The respect for other people and ideas. The reasoning? Has been a HUGE piece. … So they don't come to us now asking if their procedure's correct. They come to us and reason that their procedures ARE correct.

Her comments explicitly indicate attention to emergent mathematics: "[T]he outcomes have been SO varied and SO diverse and SO creative. It's been... enlightening."

Teacher 6 noted a major shift in his understanding of mathematical inquiry as it unfolds in the classroom as recognizing that inquiry does not have to involve a time-consuming project:

> [I]t can be in even how you address very simple questions like even a, you know, small question about a single graph, can be an inquiry if it's left open enough for the kids to talk about it and to give their opinions for them to sort of argue their ways to the eventual right answer without you and without allowing the procedurally strong kids to say, "Well, this is just the way it is because this is the way we were taught."

It seems that for him, this shift in what inquiry means opened the way for inquiry to become a way of being in the moment.

Communicating with students: Explicit reference to aspects of inquiry

In addition to drawing attention to particular aspects of evolving mathematics, the framework supported teacher noticing by offering shared language to describe significant mathematical activity. The framework not only helped teachers plan tasks and act in the moment, but also informed some teachers' discourse in class regarding what counts as valuable in mathematical work, including aspects such as the importance of conjectures and generalizations in mathematics. In some cases, this was also reflected in ways that teachers made explicit to students what would be formally assessed. Teacher 8 described the importance of language that emerged (and evolved) from the framework:

> I started referring to the "Strong Work in Math" [the DDMU framework] directly when having discussions with students. So I've always used these words in my classroom, but actually taking this and posting it and having it as a reference point for students is new. Letting them - I've also added a couple of things to it - but letting them see what's expected and talking about - like we've always used the word conjectures - we've always talked about testing plenty of examples trying to disprove things - those kinds of things? But having it there right in front of them to see and referencing it whenever we're doing problem solving - just having it posted makes it a lot easier.

Her partner (Teacher 7) went on to describe how he had increased use of "conjecture as a way of teaching"; he noted that while he had not realized that the framework had come from Galileo, it had been an important influence via his partner teacher as they worked together to develop better ways of teaching math.

Teachers 2 and 3 also discussed the significance of language that allowed more explicit recognition of and discussion of the characteristics of strong mathematical inquiry as they conversed with their students, as shown in the following excerpt from the interview:

> Teacher 3: So I guess we talked about having students develop conjectures. That was one thing.

Teacher 2: Language that came up for that.

Teacher 3: Language.

Teacher 2: And that we introduced with the students frequently.

Interviewer: What do you mean by language?

Teacher 2: Conjectures. Like that term - conjecture.

Teacher 3: Yeah.

Teacher 2: And what does it mean in mathematics.

Teacher 3: And the other thing was talking about the competencies that we want students to develop through mathematical inquiries and exploration. So reasoning…um….

Teacher 2: Problem-solving. Modeling.

Teacher 3: This was extremely valuable like looking at the "Strong Work in Mathematics…." [i.e. the DDMU]

In each of these cases, the DDMU framework became an important lens for assessment as students, too, had opportunities to become aware of the competencies described in the framework. Such awareness is an important example of assessment-for-learning. This shared teacher-student awareness also provided opportunities for summative assessment of student work, particularly as the categories were aligned with those of the school's reporting system.

Supporting mathematical communication and community

We found that teachers' comments regarding the importance of communication and community could be loosely categorized as belonging to one of two levels: One relates to showing work and sharing ideas, and the other goes further to recognize the collective amplification of evolving mathematical ideas and concepts.

Showing work and sharing ideas

Teacher 6's response clearly shows attention to the importance of explaining and justifying as significant to learning and building mathematical concepts. She described a good problem as one that involves:

> …having to explain how you got there rather than just doing the formulas […] So being able to actually explain why you're using the numbers that you're using in the way that you're using them, so that it's not just, because when I divide a fraction, I invert and multiply. But here's why that actually works and then actually showing it.

Both she and her partner also went beyond this to emphasize the deep engagement of their students as they debated mathematical ideas.

Teacher 1 seemed to dwell between the notions of communication as sharing and communication as a means of collaboratively deepening understanding. Here, his comments refer merely to explaining and sharing:

> [Teacher 12] and I, we talked a lot about communication and community this year in our math groups - so how do you clearly communicate what you're trying to say or your solution instead of just putting in an answer. How can you explain it to somebody else? And that kind of goes with the community as well that, working all together and making sure everybody in the group kind of understands what you're doing?

However, this teacher's awareness of the significance of mathematical community seemed to be gradually emerging and becoming more explicit: "So, I definitely managed to see how the mathematical community can actually contribute to kids' understanding and learning, because I didn't really ever put an emphasis on that before."

Amplifying ideas

While many teachers mentioned that the collective helped students learn from each other, communication within the classroom became, for some teachers, an important process in the evolution of mathematical concepts in class. Teacher 7 referred to a lesson in which students shared their approaches to solve a mathematical problem:

> And they went through it, you know in another way and explained their way and then the question then becomes, "Well, okay, you represented it talking about this, and you represented it talking about this, can you see how your two approaches are similar? And then sometimes at that point, it becomes…. It evolves or devolves into an algebraic representation, right? And then they can simplify it down and see that their two algebraic formulas can simplify down to the same form.

Here, students not only learned other ways to solve the same problem, but the class analyzed similarities and differences between different solutions. Appreciation of this connectedness added another dimension to their understanding; in this particular case, simplifying two solutions served to identify equivalent algebraic expressions.

While Teachers 7 and 8 did not explicitly recognize the power of conversation to amplify ideas, they did refer to "mathematical debate" as an indicator that students were deeply engaged in a particular mathematical task, and they contrasted this with the disengagement evident when students are "confused–when they start in groups seeking clarification from me" (Teacher 7). Teacher 5 further emphasized the significance of debate as an indicator of engagement rooted in deepening understanding:

> [I]f they're all like this leaning forward, and they're grabbing for the markers–for the felt pens to put their information down–they're debating with

> each other, they're discussing with each other, they're going, "Oh! No, no, no, this way, this way," or "How did you do that? Show me."

Teachers 1 and 4 made similar comments regarding the deep engagement evident as students discussed and debated emerging understandings. In each of these examples, engagement was described as rooted in deepening understanding rather than in more superficial aspects of the task, and the power of collaboration was described as central to the manner in which understanding emerged and evolved.

Conclusions

The DDMU framework presented in this chapter is a living document originally developed to support a three-year professional development program offered to the mathematics teachers in a middle school. Informed by the literature in mathematics education, academics from the Werklund School of Education of the University of Calgary, the school's interest in inquiry, and the on-going work with teachers, the DDMU framework is also an outcome that can be used as a guide for teachers to deepen their ways of knowing mathematics for teaching. The interview excerpts presented here provide preliminary evidence regarding the framework's potential usefulness in selecting and adapting rich mathematical tasks as well as for prompting in-the-moment awareness of students' ideas, conjectures, and arguments. It appears that for the teachers who took part in this study, this helped them to respond differently to emerging understandings of mathematics. In other words, the framework provided language that helped teachers to become more aware of the emergence of mathematics in the classroom (Mason & Davis, 2013).

Reflecting on teachers' responses regarding showing work and sharing ideas as part of the mathematical community, we note a significant gap between what teachers perceived and what we hoped they would include in their teaching practice. The DDMU framework provides suggested prompts for students not only to share their thinking and thus benefit from a greater diversity of ideas, but also to explicitly connect their ideas with those of others, thereby encouraging the emergence of new mathematical ideas and concepts through class collaboration. A more deliberate focus on this part of the DDMU might be required to shift attention to the emergence of mathematics through collaboration.

In contrast to other descriptions of what teachers should know or how they should know it, the DDMU framework is a practical learning instrument for teachers: It provides both assessment guidelines and direct suggestions for planning and orchestrating authentic mathematical activity and discussion in the classroom.

A question that requires further investigation is how much we should actively teach students (or teachers) to behave mathematically in the manner described in the framework and how much we merely set the stage by offering rich tasks on which they can work and reflect. In either case, the preliminary results of this study show that making these mathematical ways of knowing explicit helps teachers recognize and draw attention to them as they emerge in the daily context of their work with students.

REFERENCES

Davis, B. & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. In *Journal for Research in Math Education 34*(2), 137-167.

Davis, B. & Renert, M. (2014). *The math teachers know: Profound understanding of emergent mathematics.* New York: Routledge.

Donovan, M. S. & Bransford, J. D., Eds. (2005). *How students learn: Mathematics in the classroom.* The National Academies Press.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals and percents.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Friesen, S. (2009). What did you do in school today? Teaching effectiveness: A framework and rubric. Toronto, ON: Canadian Education Association. Retrieved from http://www.galileo.org/cea-2009-wdydist-teaching.pdf

Galileo Educational Network Association (2014). Designing For Deep Mathematical Understanding. Retrieved from http://galileo.org/designing-for-deep-math-understanding.pdf

Hewitt, D. (1999). Arbitrary and necessary part 1: A way of viewing the mathematics curriculum. In *For the Learning of Mathematics 19(3),* 2-51.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. In *Mathematical Thinking and Learning 5*(2&3), 157-189.

Marton, F. (1981). Phenomenography - describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, *10*, 177-200.

Mason, J., Burton, L, & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically (2nd Ed).* Toronto: Addison- Wesley.

Meyer, D. (2012, Sept. 18). [LOA]: Hypothesis #2: Paper is a problem [blog post]. Retrieved from http://blog.mrmeyer.com/?p=15032.

Preciado-Babb, A. P., Marcotte, C., & Metz, M. (2013). A phenomenological study of teachers' professional learning and their understanding of mathematics-for-teaching. In A. P. Preciado Babb, A. Solares Rojas, I. T. Sandoval Cáceres, & C. Butto Zarzar (Eds.). *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*, pp. 79-84. Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary. Retrieved from http://hdl.handle.net/1880/49736

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the mathematics classroom: Opportunities taken and opportunities missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 137-153. doi: 10.1080/14926156.2013.784825

Sin, S. (2010). Considerations of quality in phenomenographic research, 305-319.

CAPÍTULO III / CHAPTER III

ADAPTACIONES DE RECURSOS DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE TELESECUNDARIA. UN ESTUDIO DE CASOS

Armando Solares Rojas

RESUMEN

En este capítulo se estudian las diversas adaptaciones que los profesores de Telesecundaria realizan a las actividades propuestas en los materiales diseñados para la enseñanza de las matemáticas (SEP, 2006), y los significados de los objetos matemáticos enseñados y potencialmente aprendidos en el salón de clases. El diseño metodológico y el análisis de los resultados se estudian a partir de la perspectiva Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) y de la "doble aproximación" para el estudio de las prácticas de enseñanza (Robert, 2007). Se presentan adaptaciones del contenido matemático de una tarea de naturaleza algebraica que, si bien permiten dar explicaciones claras sobre su contenido y la manera de solucionarla, reducen su solución a una aproximación primordialmente numérica.

ABSTRACT

Studied here are teachers' adaptations of the activities proposed in the curricular materials for teaching in Telesecundaria (SEP, 2006), and the meaning of the mathematical objects that are actually taught and potentially learned in the classroom. The methodological design and the theoretical analysis are being developed in terms of the Antropological Theory of Didactics (Chevallard, 1999), and the "double approach" for studying the teaching practices (Robert, 2007). In this chapter we present adaptations of the mathematical content of an algebraic task that, despite the usefulness in clarifying explanations of content and methods to solve the task, reduce its solution to a mainly numerical approach.

ANTECEDENTES

Estudiar las maneras en que los profesores adaptan los recursos didácticos de que disponen (programas de estudio, libros de texto, herramientas tecnológicas) es un tema de gran importancia en la investigación en Educación Matemática. Es tarea fundamental abordar los problemas relacionados con el desarrollo de recursos y actividades que exploten de forma adecuada los potenciales didácticos de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en los salones de clases, así como estudiar los procesos de incorporación de recursos tecnológicos en los sistemas educativos.

Durante los últimos años, la investigación respecto a la incorporación de los recursos didácticos en las prácticas de enseñanza se ha centrado en analizar el quehacer diario de los profesores en el salón de clases: las adaptaciones a los recursos impresos (libros de texto, planes y programas de estudio) y las condiciones de incorporación de las TIC a las actividades de enseñanza y aprendizaje en las clases de matemáticas.

Entre los estudios más recientes sobre los factores que determinan las prácticas docentes se encuentran los que abordan la problemática general, sin hacer énfasis en la incorporación de recursos tecnológicos. Por ejemplo, Robert y Rogalski (2005) sostienen que entre los factores determinantes de las prácticas docentes están la historia personal, la experiencia y la historia profesional de los profesores en actividades específicas, sus conocimientos y creencias sobre las matemáticas y la enseñanza. Por su parte, Sensevy y colaboradores (2005) reconocen que las técnicas didácticas que se observan en la enseñanza de los profesores se producen con base en las creencias que dan lugar a la práctica de cada profesor. Schoenfeld (1998) desarrolló un modelo teórico sobre las decisiones y acciones de los profesores en una clase de matemáticas determinada a partir de sus objetivos, creencias y conocimientos didácticos y matemáticos específicos de la clase. De acuerdo con estos hallazgos, Gavilán *et al.* (2007, 2012) abordan el estudio de las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes generadas por el profesor, mediante la noción de "modelación de un mecanismo de construcción de conocimiento". Esta noción les permite explicar la práctica de los profesores a partir de sus cogniciones y concepciones.

Respecto a la integración de recursos tecnológicos computacionales, Trouche *et al.* (2013) explican que su integración en las aulas de matemáticas requiere la construcción de una cultura digital con nuevos paradigmas, que difiera por completo de las formas de cultura precedentes. Estos cambios impactarán las condiciones en que se llevan a cabo el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y las prácticas de los profesores. Sobre las investigaciones que abordan el estudio de las prácticas de enseñanza de las matemáticas basadas en el uso de herramientas tecnológicas, Lagrange y Monaghan (2009) sostienen que las perspectivas de investigación que intentan modelar las rutinas estables y consistentes de los profesores (como la perspectiva de Robert y Rogalski, 2005) no dan cuenta de las acciones de los maestros durante las lecciones. A partir de la perspectiva de los objetivos emergentes (Saxe, 1991), Lagrange y

Monaghan señalan que las prácticas de los profesores en un salón de clases cuya actividad se basa en el uso de la tecnología, están muy lejos de ser estables. Sin embargo, Drijvers y colaboradores (2010) matizan estos resultados. Combinando las perspectivas de los objetivos emergentes y la orquestación instrumental (Trouche, 2004), sugieren que estas, en apariencia, inestables prácticas de los profesores pueden estar ancladas en un sistema estable de creencias y conocimientos. En concordancia con esta última posición, Kieran, Tangay y Solares (2012) afirman que los procesos de adaptación de los profesores a las secuencias didácticas basadas en el uso de herramientas tecnológicas dependen en gran parte de las creencias y de los conocimientos didácticos y matemáticos de éstos respecto a temas específicos. Con un acercamiento que recupera los elementos teóricos propuestos por Schoenfeld para modelar la actividad del maestro (Schoenfeld, 1998) e integra las herramientas teóricas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), Kieran y colaboradores analizan las adaptaciones que los profesores de matemáticas hacen a las secuencias de actividades diseñadas para la investigación.

Si bien en los últimos años se ha desarrollado gran cantidad de investigación sobre la integración de recursos tecnológicos computacionales a las prácticas de enseñanza, aún se tiene poca información respecto a la integración y articulación del conjunto de materiales curriculares a las prácticas de los profesores, como son libros impresos, programas de estudios y recursos tecnológicos (Remillard, 2005). De acuerdo con Remillard, es necesario que la investigación en educación matemática desarrolle estudios detallados sobre los factores que determinan las distintas formas de uso de los materiales curriculares a disposición de los profesores de matemáticas.

La Telesecundaria y los recursos para la enseñanza de las matemáticas

Desde su creación en 1968, y hasta la actualidad, la Telesecundaria en México ha sido un modelo de educación secundaria pública, gratuita y escolarizada para brindar, a través de transmisiones televisivas, servicios a personas que, dadas las características del lugar donde habitan, no pueden acceder a otras modalidades de escuela. Según las estadísticas del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2010), del total de escuelas secundarias en el país, la mitad son telesecundarias, las cuales atienden a una quinta parte del total de la matrícula de este nivel. Según cifras de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011), en México se encuentran funcionando 17,475 telesecundarias, que atienden a 1'255,524 estudiantes.

Desde su origen, y durante varias décadas, la enseñanza en las telesecundarias se basó únicamente en clases televisadas. En sus inicios, un asesor o "telemaestro" fungía como administrador de los tiempos de uso de la televisión y también como evaluador de todas las asignaturas (SEP, 2011). En 2006, este modelo se reforma y cambia su funcionamiento, dando un papel mucho más activo tanto al profesor como a los alumnos, pero conserva la figura de un solo maestro, quien sigue impartiendo todas las asignaturas de cada grado. Además, se desarrollaron materiales impresos (libros del alumno y del maestro), así como recursos y actividades con tecnología: audiovisuales e interactivos computacionales (SEP, Mediateca de Telesecundaria Primero, Segundo y Tercer grados, 2006, 2007, 2008). Los recursos tecnológicos diseñados consisten en materiales audiovisuales, actividades para trabajar geometría dinámica y hoja de cálculo en el Aula de medios, e interactivos. Todos ellos se sugieren en momentos específicos de las secuencias didácticas correspondientes a un tema particular y se articulan a través de los materiales impresos. En el libro del maestro se ofrecen sugerencias y recomendaciones de uso para cada uno de estos recursos.

No obstante, los grandes cambios al enfoque pedagógico de Telesecundaria, los procesos de apropiación de la propuesta didáctica y de los nuevos materiales no han sido suficientemente analizados por la investigación de Educación Matemática, pues han sido pocos los estudios sobre la incorporación de dichos recursos (Fuentes y Quiroz, 2006).

En la presente investigación consideramos que los maestros no planean sus clases ni actúan basados en los materiales curriculares y en el programa de estudios, sino que toman en cuenta las necesidades específicas de sus estudiantes, sus concepciones sobre cómo se enseña, cómo se aprende y sus conocimientos matemáticos del tema (Block *et al.*, 2007). La historia personal de los profesores, las condiciones específicas de su escuela y de sus alumnos, así como sus conocimientos y recursos culturales tienen un papel central en sus prácticas de enseñanza. Sin embargo, como un primer acercamiento al estudio de las prácticas de enseñanza en Telesecundaria, nos centramos en el estudio de los procesos de adaptación y transformación que efectúan los profesores al usar los materiales curriculares diseñados para esta modalidad (SEP, 2007). Nos interesa conocer las adaptaciones que realizan los profesores en torno a tres aspectos: el contenido matemático, el papel que los profesores otorgan a los estudiantes en la actividad y la función que asignan a los recursos y materiales.

MARCO TEÓRICO

Para realizar este estudio nos ubicamos en la perspectiva teórica de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD), de Yves Chevallard (1999). Desde esta perspectiva, las actividades humanas se analizan mediante cuatro componentes, que de acuerdo con Artigue (2002) son las siguientes:

> Las prácticas, o "praxeologías", como son llamadas en la aproximación de Chevallard, son descritas mediante cuatro componentes: un tipo de tareas en el cual el objeto [matemático] está inmerso; las técnicas usadas para resolver este tipo de tareas; la "tecnología", es decir, el discurso que es usado tanto para explicar como para justificar las técnicas; y la "teoría" la cual provee una base estructural para el discurso tecnológico mismo y puede ser vista como la tecnología de la tecnología (Artigue, 2002, p. 248).

Empleamos las herramientas teóricas de la TAD para analizar las tareas matemáticas propuestas y desarrolladas en Telesecundaria. Interesa en especial destacar la categoría de Chevallard sobre el *saber-hacer*: las tareas y las técnicas, para caracterizar las adaptaciones que los profesores hacen de las actividades propuestas en los materiales curriculares.

Respecto a las tareas, Chevallard (1999) señala:

> En la mayor parte de los casos, una tarea (y el tipo de tareas correspondientes) se expresan mediante un verbo: barrer la habitación, desarrollar la expresión literal dada, dividir un entero por otro, saludar a un vecino, leer un manual, subir una escalera, integrar la función $x \rightarrow x1nx$ entre $x = 1$ y $x = 2$, etc. (Chevallard, 1999, p. 224).

De acuerdo con lo anterior, la tarea es la acción a ejecutar, mas no el cómo se ejecuta la tarea; es decir, la tarea explicita el "saber" de lo que se va a hacer. Ahora bien, para diferenciar entre tareas específicas, tipos de tareas y géneros de tareas, Chevallard hace las siguientes aclaraciones:

> Para comenzar, la noción de tarea empleada aquí es evidentemente más amplia que la del francés común: rascarse la mejilla, ir de un sofá hasta la vitrina, incluso sonreírle a alguien, son por tanto tareas. [...] Entonces, la noción de tarea, o más bien de tipo de tareas, supone un objetivo relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tareas, pero subir, a secas, no lo es. Asimismo, calcular el valor de una función en un punto es un tipo

> de tareas; pero calcular, a secas, es lo que se llamará un género de tareas, alude a un determinativo (Chevallard, 1999, p. 224).

El 'género de tareas' es la acción que se lleva a cabo en un momento determinado, la cual especifica pero no condiciona la acción. Por otro lado, el tipo de tareas sí especifica y condiciona la acción a ejecutar.

En cuanto a la noción de técnica se retoma lo señalado por Chevallard:

> Sea entonces T un tipo de tarea dado. Una praxeología relativa a T precisa (en principio) una manera de completar, de realizar tareas $t \in T$: a tal manera de hacer, τ, se le da aquí el nombre de técnica (del griego *tekhnê*, saber-hacer). Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene entonces, en principio, una técnica τ relativa a T. Contiene, por tanto, un "bloque" denotado $[T/\tau]$, que se llama bloque práctico-técnico, y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se llama un saber-hacer: un cierto tipo de tareas T, y una cierta manera, τ, de realizar las tareas de este tipo. [...] (Chevallard, 1999, p. 225).

La técnica (τ) es una manera relativa de cómo se van a ejecutar las "tareas específicas" (t) pertenecientes al tipo de tareas (T), denotada a su vez por una acción. De acuerdo con esta noción de técnica, al caracterizar los conocimientos matemáticos se reconocen las tareas específicas, los tipos de tareas a los que pertenecen éstas y la manera en que los estudiantes ponen en actividad sus conocimientos matemáticos.

Sin embargo, las técnicas no son "absolutas", es decir, en general no hay técnicas que permitan resolver todas las tareas de cierto tipo. Como señala Chevallard:

> Para comenzar, una técnica τ –una "manera de hacer"– no tiene éxito más que sobre una parte $P(\tau)$ de las tareas del tipo T al cual corresponde, parte que se llama portadora de la técnica: ella [la técnica] tiende a fallar sobre

> T \ P(τ), de manera que se puede decir que "no se sabe, en general, realizar las tareas del tipo T". [...] Desde este punto de vista, una técnica puede ser superior a otra, si no sobre todo T, al menos sobre una cierta parte de T (Chevallard, 1999, p. 225).

En este sentido, las técnicas tienden a resolver el mayor número de tareas específicas. Sin embargo, la técnica no es absoluta porque ésta se adecúa a las tareas específicas propias de un tipo de tareas.

Para elaborar el análisis de las prácticas de enseñanza en clases específicas, recurrimos a la perspectiva de la *doble aproximación* (*double approche*), propuesta por Robert (2001, 2007). En ésta se consideran dos aspectos de las prácticas que se entrelazan: por una parte, los efectos potenciales de las prácticas sobre los aprendizajes de los alumnos, tomados en cuenta a partir de las actividades que éstos realizan en clase y que son consecuencia de la enseñanza; por otra parte, el oficio del profesor, considerando los factores exteriores, institucionales, sociales y personales que determinan su trabajo real.

Robert realiza el análisis de actividades de los estudiantes que el maestro produce en clase en tres tiempos: análisis *a priori* de las tareas propuestas, el análisis *a posteriori* del desarrollo de la sesión y reconstitución de las posibles actividades de los estudiantes.

Además, Robert considera como variables en los aprendizajes los diversos aspectos de las actividades que el profesor produce en clase. Una de estas variables corresponde a la dinámica global entre la exposición de conocimientos del curso, en relación con la solución de ejercicios y problemas. Esta dinámica permite entender la enseñanza de las matemáticas, con base en la forma en la que los estudiantes construyen ciertos conocimientos; por ejemplo, cuando la dinámica consiste en que la formalización del conocimiento se apoya en las primeras resoluciones, dadas a problemas propuestos antes de la exposición de este conocimiento.

Otra de las variables corresponde a la variedad (cantidad, orden, naturaleza) de las tareas propuestas a los estudiantes en los enunciados de los ejercicios y de los problemas. En particular, dicha variable ha sido tratada, en esta investigación, mediante el análisis *a priori* de todas las tareas de proporcionalidad que se incluyen en el libro de texto de primer grado de Telesecundaria.

Finalmente, otra de las variables consideradas por Robert corresponde a lo que harán o pueden hacer los estudiantes en clase en relación con el uso de sus conocimientos matemáticos, promovido por la actividad del profesor en clase. Se toman en cuenta los intercambios, los conflictos, las verbalizaciones demandadas a los alumnos, la naturaleza de validaciones dadas a su trabajo, todas las explicaciones a los alumnos las formalizaciones. De acuerdo con Robert, todo lo anterior permite saber cuál es la autonomía que se deja a los alumnos y sus posibles iniciativas, incluyendo aquellas que el maestro no ha previsto. Interesa identificar las ayudas y las recapitulaciones que hacen los profesores para volver accesibles algunas tareas o para contribuir a su interiorización al elegir el momento adecuado para hacer una generalización, una descontextualización, etcétera. En particular, se identifican dos tipos de ayuda (Robert, 2007). Por un lado, las ayudas del tipo 1 juegan sobre las tareas prescritas, modificando estrictamente las actividades previstas a partir de lo enunciado en clase. Corresponden a las indicaciones dadas por el maestro, antes y durante el trabajo de los estudiantes, quienes dividen la tarea, introduciendo subtareas e indicando un método. Por otro lado, las ayudas de tipo 2 añaden "algo" entre la actividad estricta del estudiante y su construcción y adquisición del conocimiento, que podría resultar de la solución de un problema. Esto que se agrega puede ser dado por la actividad del profesor mediante una simple recuperación de lo que se ha hecho, tanto en una aplicación inmediata o por los recordatorios, o por medio de recapitulaciones e intervenciones que llevan a los estudiantes a tomar una pequeña distancia de lo que acaban de hacer (Robert, 2007, pp. 277-278).

En este capítulo nos centramos en el primer aspecto considerado por la doble aproximación: los efectos potenciales de las prácticas del profesor sobre los aprendizajes de los alumnos, tomados en cuenta a partir de las actividades que realizan en clase y que son provocadas por la enseñanza.

METODOLOGÍA

Trabajamos con profesores y alumnos de una escuela telesecundaria del Estado de México. La escuela cuenta, desde hace varios años, con aula de medios, proyector, televisión con reproductor de DVD y antena satelital de televisión. Se eligió a tres profesores de primer grado que tenían experiencia de al menos cinco años con los nuevos materiales de Telesecundaria.

Con estos profesores y alumnos se realizaron entre tres y cuatro videograbaciones de las clases regulares de cada uno (Robert, 2007), dependiendo del tiempo que les tomó cubrir las lecciones de los temas elegidos. Al finalizar las clases, se llevó a cabo una entrevista con cada uno de los profesores para discutir el desarrollo de las sesiones, las dificultades y situaciones inesperadas, así como los criterios de elección de los materiales empleados para la clase (impresos, informáticos y audiovisuales).

Para la observación, se eligieron los temas de proporcionalidad y la variación lineal, pues son ejes articuladores de gran cantidad de contenidos estudiados en secundaria. En estos temas es importante la intervención del profesor para la articulación de los conocimientos provenientes de la aritmética (relaciones de proporcionalidad) y los del tratamiento algebraico (funciones lineales).

En este reporte presentamos extractos de la clase de una de las maestras del estudio, quien manifestó afinidad por la propuesta didáctica de los libros de texto y mostró manejar bien el contenido matemático que en ellos se presenta.

Primeros resultados

Para realizar el análisis de las actividades propuestas a los alumnos, efectuamos un análisis *a priori* de las tareas propuestas y un análisis *a posteriori* del desarrollo de la clase. El primer análisis se efectuó en términos de los elementos teóricos de tareas y técnicas proveniente de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). El segundo análisis fue sobre el desarrollo de la clase (Robert, 2007) en términos de los diversos aspectos de las actividades que el profesor produce en clase: la dinámica global entre la exposición de conocimientos del curso y la solución de ejercicios y problemas; la variedad de las tareas propuestas a los estudiantes; y, finalmente, los intercambios, las verbalizaciones demandadas a los alumnos, la naturaleza de las validaciones dadas al trabajo de los estudiantes, las explicaciones emitidas, las formalizaciones y las ayudas.

Determinamos centrarnos en los temas de la enseñanza de la proporcionalidad y la variación lineal de primer grado de secundaria. El estudio de estos temas permite establecer puentes y relaciones entre dos grandes áreas del conocimiento matemático: la aritmética y el álgebra. Es importante señalar que en México el paso de la educación primaria a la secundaria se caracteriza, entre otras cosas, por la introducción formal del estudio del álgebra. Sin embargo, las características y exigencias didácticas y matemáticas de esta transición por lo general quedan implícitas tanto en los programas de estudio, como en los libros de texto y demás materiales didácticos.

Los materiales de Telesecundaria abordan estos temas durante los tres años del nivel de secundaria. Para ello se cuenta con un gran número de videos, interactivos y actividades para el aula de medios. Uno de los problemas típicos de proporcionalidad estudiados en primer grado de secundaria, es el siguiente:

> Se trata de cambiar fichas por estampas. En el trato A por cada seis fichas te dan 12 estampas. En el trato B por cada ficha te dan tres estampas. Hay

que decidir cuál trato conviene más.

Se trata de un problema de comparación de razones.

Una de las técnicas para resolver este problema consiste en comparar los resultados obtenidos al cambiar estampas en cada uno de los tratos, como se indica en la figura 1. Ésta es una técnica típicamente aritmética, que se llama en español conservación de *razones internas*, y en inglés *building-up procedure*.

Número de fichas	Trato A Por cada 6 fichas, 12 estampas
12	24
24	48
30	60
36	72

Número de fichas	Trato B Por cada ficha, 3 estampas
12	36
24	72
30	90
36	108

Figura 1. Solución de un problema de comparación de razones mediante la técnica de *building-up*.

En cambio, en álgebra, las técnicas que típicamente se aplican consisten en encontrar las *expresiones algebraicas* ($y = 2x$, $y = 3x$) o las *gráficas* correspondientes, y compararlas. La figura 2 muestra las gráficas que resultan de este problema.

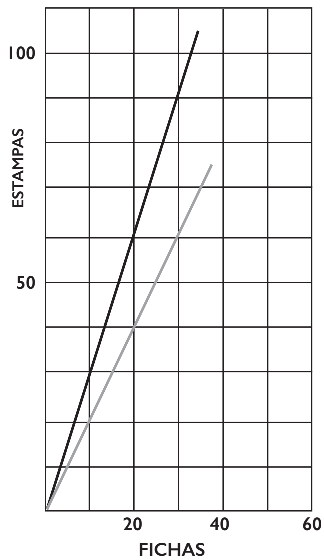


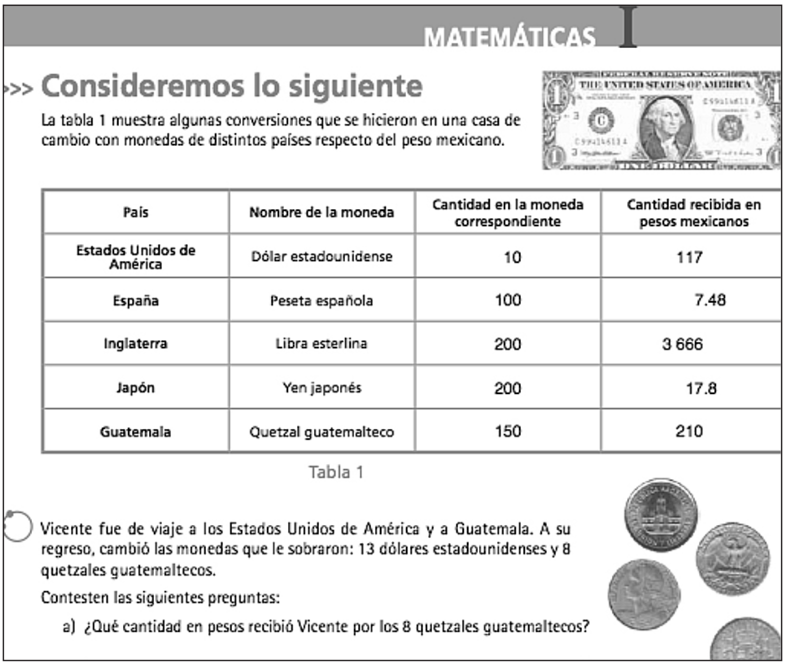
Figura 2. Solución de un problema de comparación de razones mediante la técnica de *comparación de las gráficas*.

En este tránsito del estudio de la proporcionalidad al de las funciones lineales, los aspectos esenciales de la proporcionalidad se transforman y reformulan. En ambas, proporcionalidad y funciones, aparecen números y variables pero sus referentes, sus significados y las formas de operarlos son distintos. En aritmética, los números provienen de medidas de magnitudes, que muchas veces incluyen a sus unidades. En álgebra, los números se estudian, además, como elementos de un conjunto abstracto, con estructura. En la aritmética, la variación viene dada por el contexto, al aumentar la cantidad de fichas, aumenta el número de estampas. En álgebra, las variables son objetos matemáticos representados mediante letras y se operan con una sintaxis propia, la algebraica.

Por lo general, esta transición entre niveles de estudio (de la escuela primaria a la secundaria) y entre áreas diferentes de las matemáticas (la aritmética y el álgebra) es ignorada con frecuencia y poco explicitada para los profesores, generando grandes dificultades para su gestión en los salones de clases.

A continuación presentamos una de las adaptaciones de las actividades propuestas en el libro de texto identificadas en esta investigación. Siguiendo la perspectiva de la "doble aproximación", realizamos un análisis *a priori* de las tareas propuestas en el libro y un análisis *a posteriori* del desarrollo de la tarea en la clase.

Se trata de resolver un problema de proporcionalidad, de valor faltante, en un contexto de cambio de monedas: *Se sabe que por 150 quetzales guatemaltecos te dan 210 pesos mexicanos. ¿Cuántos pesos te dan por 8 quetzales?* (Araujo *et al.*, 2006, pp. 164-171). Ver figura 3.



MATEMÁTICAS I

>> Consideremos lo siguiente

La tabla 1 muestra algunas conversiones que se hicieron en una casa de cambio con monedas de distintos países respecto del peso mexicano.

País	Nombre de la moneda	Cantidad en la moneda correspondiente	Cantidad recibida en pesos mexicanos
Estados Unidos de América	Dólar estadounidense	10	117
España	Peseta española	100	7.48
Inglaterra	Libra esterlina	200	3 666
Japón	Yen japonés	200	17.8
Guatemala	Quetzal guatemalteco	150	210

Tabla 1

Vicente fue de viaje a los Estados Unidos de América y a Guatemala. A su regreso, cambió las monedas que le sobraron: 13 dólares estadounidenses y 8 quetzales guatemaltecos.

Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad en pesos recibió Vicente por los 8 quetzales guatemaltecos?

Figura 3. Problema de cambio de monedas (Araujo *et al.*, 2006, p. 164).

Éste es el primer problema de proporcionalidad del libro de texto para el cual se va a plantear la tarea de encontrar la expresión algebraica correspondiente. El análisis *a priori* de las características de esta tarea indica que se promueve el uso de dos técnicas típicas de la proporcionalidad: el valor unitario y la constante de proporcionalidad (Block *et al.*, 2010). Sin embargo, en el libro de texto se insiste sistemáticamente en contrastar la efectividad de otras técnicas, como las *razones internas* y el *building-up* (Block *et al.*, 2010), y en el carácter "general" de la constante de proporcionalidad, en términos de que la misma constante funciona para cualquier par de valores de pesos y quetzales de la relación de proporcionalidad.

El análisis *a posteriori* del desarrollo de la clase en que se resolvió esta tarea nos ha permitido identificar algunas de las adaptaciones dadas para su solución, como la introducción de "ayudas" (Robert, 2007), que cambian el contenido matemático originalmente propuesto en los materiales curriculares. El siguiente extracto da cuenta de la ayuda que proporcionó la maestra.

> Maestra: Ya hemos hecho ese tipo de ejercicios. ¿Qué podemos hacer para saber cuántos quetzales vamos a recibir?
> Diego: Dividiendo
> Maestra: ¿Qué voy a dividir?
> Diego: Esteee… el número de pesos por el número de, de…
> Maestra: ¿Por o entre?
> Diego: … entre el número de quetzales.
> Maestra: Entonces, fíjense muchachos, están descubriendo así, simple y sencillamente, la constante de proporcionalidad, o sea 1.4 nos va a permitir saber, si tenemos los quetzales, cuánto vamos a recibir en pesos.

En este episodio, la ayuda de la maestra reduce la complejidad de la tarea. La ayuda privilegia dos aspectos del uso de la constante de proporcionalidad. Por una parte, se da por hecho que siempre hay que encontrar la constante, y se centra la atención en cómo hacerlo. Con lo anterior, se cancela el espacio para que se usen otras técnicas. Además, la manera de encontrar el valor de la constante es de naturaleza procedimental: " [siempre] se divide". Por otra parte, a lo largo del desarrollo de la clase, se pierde el énfasis del carácter general del uso de la constante, reduciendo su uso al cálculo de valores numéricos particulares.

Más adelante, después de escribir la expresión algebraica correspondiente: $y = 1.4x$ (y = cantidad de pesos, x = cantidad de quetzales), la maestra introdujo una tarea que no estaba contemplada en el libro de texto. Pidió que se buscara la expresión algebraica de la relación inversa de la relación de proporcionalidad.

> Maestra: ¿Y si fuera al revés? Busquen ustedes una expresión, o sea, ahora resulta que yo tengo los pesos y quiero saber cuántos quetzales me van a dar por esos pesos, ¿cómo le harían ustedes?

La tabla 1 muestra los distintos tipos de respuestas dadas por los estudiantes a esta nueva tarea.

Tipo de respuesta	**Ejemplos de respuestas**
Uso de números particulares: corresponden a técnicas que operan con la información inicial dada (por 150 quetzales guatemaltecos te dan 210 pesos mexicanos), y dan una respuesta numérica particular a la tarea (general) planteada.	$y = 150$ $y = 210 \div 1.4$
Operaciones que hay que efectuar: se centran en la operación que hay que efectuar sobre la primera constante de proporcionalidad encontrada para obtener la cantidad pedida.	"División"
Expresión algebraica: dos cantidades relacionadas a través de una operación sobre la primera constante de porporcionalidad encontrada.	"*y* es igual a *x* entre 1.4"

Tabla 1. Respuestas para la expresión algebraica de la inversa a una relación de proporcionalidad dada.

La adaptación de estas tareas muestra una forma de tratamiento de la constante de proporcionalidad que modifica el contenido matemático propuesto originalmente. Las intervenciones de la maestra y las producciones de los estudiantes dan un tratamiento numérico, para valores particulares, a las tareas de encontrar expresiones algebraicas generales. Si bien, por una parte, estas ayudas permiten a la maestra explicar de manera rápida y sencilla cómo obtener la constante, por otra, causan conflictos no esperados en el tratamiento algebraico de la constante. Sólo una de los 35 estudiantes de la clase planteó una expresión algebraica de carácter general.

Reflexiones finales

Los primeros resultados muestran algunas de las maneras en que los profesores adaptan las tareas y las funciones del alumno, el libro y los recursos tecnológicos propuestos en las actividades de los materiales curriculares de Telesecundaria. En el presente momento del análisis buscamos entender los criterios, consideraciones, conocimientos didácticos y matemáticos que los profesores ponen en juego para realizar dichas adaptaciones, y las consecuencias que representan en la clase la construcción de los conocimientos matemáticos.

Consideramos importante identificar estos conocimientos que aplican los profesores en su práctica docente, para solucionar los problemas de enseñanza que enfrentan. Si bien estos conocimientos, provenientes de la práctica, toman significados y sentido a partir de las condiciones y situaciones específicas en las cuales se movilizan, su identificación puede ser relevante para el diseño de programas de formación docente y continua y de políticas de implementación de innovaciones curriculares, por ejemplo.

Referencias

Araujo, M., García, S., García, J., López, O. y Rosainz, V. (2006). *Matemáticas I.* Volumen II. Telesecundaria. México: SEP-ILCE.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245-274.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12* (33), 731-762.

Block, D., Mendoza, T., Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM Ediciones.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*, 221-266.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Whole-class teaching behavior in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, Online First.

Fuentes, M. y Quiroz, R. (2006). Un acercamiento a la reforma de la educación secundaria desde los usos y propósitos que los maestros de telesecundaria dan a los recursos pedagógicos del modelo de 2006. En *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*, (Veracruz, 21-25 de septiembre de 2009) II (s.n.), 1-9.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 219-235.

Gavilán, J. M., García, M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(2), 157-170.

INEE (2010). *Panorama educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional, Educación Básica y Educación Media Superior*. México: INEE.

Kieran, C., Tanguay, D., & Solares, A. (2012). Researcher-designed resources and their adaptation within classroom teaching practice: Shaping both the implicit and the explicit. En: G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.). *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum material and teacher development.* NuevaYork: Springer, 189-213.

Lagrange, J.-B. & Monaghan, J. (2010). On the adoption of a model to interpret teachers' use of technology in mathematics lessons. En: V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*, 211-246.

Robert, A. y Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 269-298.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré): une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27*, 271-312.

Saxe, G. B. (1991). *Culture and cognitive development*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1998). *Toward a theory of teaching-in-context. Issues in Education, 4*(1), 1-94.

SEP (2007). *Mediateca didáctica de Telesecundaria* (primer grado). México: SEP.

SEP (2008). *Mediateca didáctica de Telesecundaria* (segundo grado). México: SEP.

SEP (2009). *Mediateca didáctica de Telesecundaria* (tercer grado). México: SEP.

SEP (2011). *Modelo educativo para el fortalecimiento de Telesecundaria. Documento base.* México: SEP.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M.-L., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics, 59*,153-181.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281-307.

Trouche l., Drijvers, P., Gueudet, G. y Sacristán, A. (2013). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. En: M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, F.K.-S. Leung (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education.* New York: Springer, 753-789.

PARTE DOS / PART TWO

QUÉ, CÓMO Y POR QUÉ: ¿CÓMO SE PUEDE APOYAR A LOS PROFESORES PARA ACTUAR DE ACUERDO CON ESTE CONOCIMIENTO EN SU PRÁCTICA?

WHAT, HOW, WHY: HOW TEACHERS CAN BE SUPPORTED TO ENACT THIS KNOWLEDGE IN THEIR PRACTICE?

CAPÍTULO IV / CHAPTER IV

LA NECESIDAD DE CAMBIO EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN PRIMARIA A TRAVÉS DEL TRABAJO COLABORATIVO ENTRE INVESTIGADORES Y MAESTROS

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres,
María Dolores Lozano Suárez

Resumen

Observaciones que hemos realizado en México muestran que, a pesar de transitar por diferentes reformas educativas y contar con distintos recursos, en general, los maestros han modificado poco sus prácticas. Desde una perspectiva enactivista (Maturana y Varela, 1992), consideramos que mientras los maestros actúan de manera que les permite seguir existiendo en su contexto, no ven la necesidad de cambiar sus acciones de manera significativa. El cambio, por tanto, proviene de identificar ciertas acciones como no adecuadas. En este capítulo presentamos ejemplos de cómo el trabajo colaborativo entre pares e investigadores puede propiciar necesidades auténticas de cambio entre los profesores.

Abstract

Classroom observations carried out in Mexico for more than a decade indicate that, even when teachers have been through a number of educational reforms and are provided with a number of different resources, they seldom change their teaching practices in a significant manner. From an enactivist perspective (Maturana and Varela, 1992) we consider that when teachers act in a way that can be considered adequate, that is, a way that allows them to continue existing as teachers in a particular context, they do not see a need for changing their ways substantially. Change comes from identifying actions which are somehow inadequate. In this chapter we provide some examples of the way in which collaborative work between teachers and researchers can trigger an authentic need for change in teaching practices.

Introducción

La educación básica en México es heterogénea tanto en el tipo de escuelas (generales, indígenas, comunitarias, federales, estatales y particulares) como en la formación de profesores. Esto, aunado con la cantidad de escuelas, alumnos y profesores –casi 100,000 escuelas de primaria, alrededor de 15 millones de alumnos y más de 570,000 profesores, en el ciclo 2013, según datos de la Subsecretaría de Educación Básica (SEB)– agrega complejidad al problema de la formación continua y actualización de los docentes.

En los últimos 20 años se ha transitado por tres reformas educativas, las cuales replantean el enfoque de enseñanza de las matemáticas tanto en el plan y programas de cada nivel educativo como en los recursos disponibles para los profesores, tales como los libros de texto para los alumnos (obligatorios y gratuitos), el libro para el profesor y otros materiales otorgados por la propia SEB. Los resultados de algunas investigaciones sobre el impacto de las reformas educativas en las clases de matemáticas de educación primaria en México (Ávila, 2004; Block *et al.*, 2007) señalan que con frecuencia los profesores siguen utilizando, en mayor o menor medida, los enfoques anteriores a éstas. Se adaptan los nuevos recursos utilizando estrategias previas aun cuando los aprendizajes de las matemáticas en sus estudiantes sigan siendo deficientes. Al respecto, se destaca la relación que existe de las acciones en el aula "con creencias y convicciones y no sólo con destrezas didácticas", y se señala que "modificar las concepciones y el núcleo de las creencias resulta mucho más complejo" (Ávila, 2004, p. 350). Sin embargo, las investigaciones reportan que "las estrategias de los maestros han tendido a establecer equilibrios entre las prácticas propias y algunos de los planteamientos de la propuesta curricular" (Block *et al.*, 2007, p. 286), además puntualizan que el conflicto parece ser un elemento clave para generar los cambios en las prácticas. Pero no identificaron qué detona la decisión de cambiar dichas prácticas.

Lo anterior coincide con nuestras observaciones en clases de matemáticas durante más de una década. Esto es, los maestros, en su mayoría, a pesar de transitar por diferentes reformas y contar con diversos recursos (tanto digitales como nuevos libros de texto) han modificado poco sus prácticas (Trigueros, Lozano y Sandoval, 2014).

Investigadores en otros países reconocen que los cambios en las aulas ocurren cuando los profesores participan de manera activa en la toma de decisiones, diseñan e implementan actividades para sus clases, y también cuando colaboran en el diseño de programas de desarrollo profesional para ellos mismos y sus colegas (ver por ejemplo Cuban, 2000; Ruthven, 2009).

De acuerdo con dichos resultados de investigación, se han generado diversas propuestas de acompañamiento para que los profesores de matemáticas se involucren en procesos de desarrollo profesional permanentes. Algunas propuestas han planteado el trabajo colaborativo entre los investigadores y los profesores. Por ejemplo, Climent y Carrillo (2007) conjuntan a investigadores, formadores de profesores y maestras de primaria en un entorno colaborativo de co-aprendizaje en el que se promueve la reflexión, el desarrollo profesional y la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. La estrategia utilizada para lograr este análisis es a partir de situaciones reales de aula (propias o de otros profesores). Sus conclusiones señalan que la comunicación entre profesores e investigadores permite identificar buenas prácticas, caracterizarlas y aprender de ellas.

En el presente trabajo se pretende contribuir en esta misma línea de colaboración entre investigadores y profesores, analizando el surgimiento del cambio en las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el nivel de Educación Primaria en México. Nuestro enfoque se basa en la perspectiva enactivista, pues nos permitirá explicar el por qué pocos profesores cambian sus prácticas en el quehacer cotidiano de su profesión y a describir instancias y condiciones en las que emerge la necesidad de cambio.

Marco teórico

Desde el enactivismo, los individuos al interactuar con el mundo, se organizan a sí mismos continuamente determinados por su historia (Maturana y Varela, 1992). Si esta organización da lugar a un funcionamiento adecuado, entonces podemos considerar que se ha logrado un aprendizaje, es decir, el enactivismo considera que el aprendizaje es el cambio estructural que ocurre en los individuos al interactuar con el medio, de tal manera que el sujeto pueda funcionar adecuadamente en éste (Maturana y Varela, 1992). El *conocer,* que para el enactivismo es sinónimo del *hacer*, está asociado con la conducta adecuada o la acción efectiva en un lugar determinado (Maturana, 1987, p. 66). Si pensamos en un(a) profesor(a) de matemáticas, podremos darnos cuenta de que funcionar adecuadamente significa actuar de modo que se pueda continuar existiendo en un determinado ambiente, es decir, llevar a cabo acciones que son consideradas aceptables en la comunidad, lo que incluye alumnos, otros maestros, directivos, padres de familia, etcétera. Los criterios de aceptación serán especificados en diferentes contextos. Por ejemplo, para cierto maestro realizar actividades que incluyan la participación activa y tal vez ruidosa de los estudiantes puede ser aceptable, mientras que la misma conducta en otro salón puede ser tomada como signo de desorden por parte de otros miembros de la comunidad escolar. El comportamiento que no es efectivo provocará la interrupción de las interacciones, y a la larga impedirá al individuo participar en el contexto donde las acciones son inaceptables. La conducta adecuada, entonces, es la que permite a los profesores seguir siendo profesores en el salón de clases en el que se encuentran.

Cuando el sujeto, en la interacción con el contexto, presenta un actuar que es adecuado, no surge la necesidad de modificarlo de manera sustancial. Aunque haga modificaciones menores, el individuo no presentará cambios estructurales que impacten y modifiquen su actuar de manera significativa. Cuando el individuo percibe un actuar no del todo adecuado, ya sea porque recibe señales directas del medio que así lo indican (una observación negativa por parte de un supervisor, de un colega o de sus alumnos), o porque percibe señales internas en un momento de reflexión que le indican que algo debe cambiarse, es cuando dicha persona busca, consciente o inconscientemente, hacer las cosas de modo distinto. Estas ideas nos ayudan a considerar a los maestros como sujetos que interactúan en los contextos escolares y que, en dichos contextos, llevan a cabo acciones que son efectivas o adecuadas en menor o mayor grado. Por ello, consideramos que mientras las acciones sean adecuadas, es decir, si le permiten seguir interactuando en el contexto, no se ve en la necesidad de cambiarlas.

Como se mencionó anteriormente, según nuestros datos y los de otros investigadores dan cuenta de que con frecuencia los maestros adaptan nuevos recursos a sus prácticas tradicionales, sin necesidad de modificarlas. Sin embargo, a través del trabajo efectuado en diversos proyectos de investigación, sí hemos podido observar cambios en las prácticas docentes. A través de interacciones con distintas herramientas digitales, con alumnos, con otros maestros y con investigadores nos hemos dado cuenta de cómo emerge la necesidad de cambio y el cambio mismo. De aquí que surja la siguiente pregunta de investigación que constituye el tema de este capítulo: ¿De qué manera emergen necesidades auténticas de cambio a través del trabajo conjunto de investigadores y maestros?

Metodología

En este capítulo responderemos a la pregunta anterior a partir del análisis de observaciones, entrevistas y talleres con maestros en las que la reflexión colectiva (entre pares y con investigadores) sobre las prácticas propician la necesidad auténtica de cambio.

Durante los últimos años trabajamos con profesores de primaria en varios proyectos sobre el uso de Tecnologías Digitales (TD) para el aprendizaje de las matemáticas. En este capítulo haremos referencia a dos de ellos.

En el primer proyecto nuestro interés fue *caracterizar cómo se movilizan los conocimientos profesionales de los profesores desde una dimensión tecnológica y del conocimiento matemático para la enseñanza* (Sandoval, 2013). Para ello se implementó un taller de desarrollo profesional, con el cual se buscó propiciar la reflexión en el colegiado de profesores, sobre las dimensiones tecnológica, didáctico-pedagógica y de contenido matemático a partir del análisis de sus propias prácticas de enseñanza, en un entorno de colaboración entre pares e investigadores. Dicho taller se desarrolló en ocho sesiones de dos horas cada una, y participaron 14 docentes frente a grupo y el director de una escuela de la Ciudad de México (García, 2012). Se dio seguimiento y acompañamiento permanente sólo a los tres profesores de sexto grado. En este marco surgieron varios eventos que consideramos indicadores de cambio en los profesores, que serán presentados en el siguiente apartado.

En el segundo proyecto, aún en desarrollo, nuestro objetivo es *investigar, a profundidad y de forma cualitativa, la manera en que se utilizan las herramientas de una innovación pedagógica y tecnológica (sistema),* que ha sido adoptada por un número considerable de escuelas privadas en Latinoamérica, *en las clases de matemáticas*. El sistema proporciona a los maestros y estudiantes diversos materiales, desde libros de texto, una plataforma, hasta aplicaciones para ser utilizadas en tabletas (*tablets*). En este segundo proyecto se ha dado seguimiento a tres profesores, a quienes se ha observado y entrevistado. Aunque el trabajo de campo aún no concluye, los datos obtenidos hasta el momento nos han proporcionado información valiosa acerca del tema de interés en el presente trabajo.

Cabe destacar que los profesores participantes en los dos proyectos mencionados carecían de experiencia en el trabajo colaborativo, tanto entre pares como con investigadores. De igual manera, era poco frecuente la observación de sus clases por parte de investigadores y de sus colegas. Cuando sí ocurrió, era más con fines de evaluación que como una herramienta para reflexionar sobre la práctica.

Para el estudio del cambio de prácticas de los maestros reportado en este trabajo, la metodología seguida consistió en analizar videos y transcripciones de observaciones de clase y entrevistas, con el fin de identificar momentos en que los maestros reconocieron la necesidad de modificar sus prácticas.

Según la perspectiva enactivista, que también influye en la parte metodológica de cualquier investigación con este marco, ambas investigadoras realizamos el trabajo de manera conjunta, proceso en el que surgieron largas discusiones acerca de cómo creemos que emerge el cambio en las prácticas docentes.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Como mencionamos anteriormente, el propósito que motivó este estudio fue investigar la manera en que emergen necesidades auténticas de cambio en el trabajo conjunto de investigadores y maestros, en un contexto de uso de innovaciones tecnológicas. Organizamos esta sección en dos subapartados, en los que se identificaron cambios o necesidades de cambio:

1. A partir de la reflexión al observar su propia práctica.
2. Al interactuar con sus colegas y/o investigadores en el trabajo colaborativo.

Observación de la propia práctica

De acuerdo con la metodología planteada, en el primer proyecto se utilizó el taller como un espacio que propiciara el intercambio de experiencias en el aula. En este espacio observamos que uno de los factores que contribuye a la emergencia del cambio en las prácticas, es la reflexión que se realiza al ver las videograbaciones de la propia práctica. Un ejemplo de ello es lo que expresa el profesor Juan a sus demás colegas. A continuación describimos brevemente la actividad realizada.

Enmarcando la práctica de enseñanza analizada

Juan es uno de los tres profesores de sexto grado. Desde hace siete años, Juan (J), Olivia (O) y Fernanda (F) trabajan en la misma institución, y es la primera vez que tienen la oportunidad de trabajar en equipo. Los tres profesores acordaron planear una clase cuyo tema fue la *representación de fracciones y decimales en la recta numérica*. Para ello decidieron realizar diferentes actividades y utilizar varios recursos para trabajarlos en el salón de clase, donde tenían disponible una computadora. Uno de los recursos es el juego interactivo "¿Y dónde está el número?"; en éste, los estudiantes deben encontrar un número entre otros dos dados. Si la respuesta es un número entero, se obtiene un punto; si es decimal, dos puntos, y si se trata de un número mixto se obtienen tres puntos. Las limitaciones de la programación del recurso, y que son relevantes para la situación que analizamos, son: *a)* en las fracciones, el numerador y denominador sólo pueden tener hasta dos dígitos; y *b)* sólo admite ingresar hasta centésimos en los números decimales.

Juan utilizó este juego interactivo para reforzar lo visto en la clase. Los alumnos propusieron números para cada intervalo, en algunos casos, incorrectos. En dichas ocasiones Juan daba la respuesta correcta sin ofrecer alguna explicación. Posteriormente, se llegó a una situación en la que los extremos del intervalo fueron los números 435.36 y 435.37. En este caso, los alumnos encontraron un número decimal entre estos dos, como se muestra en el siguiente diálogo:

> J: ¿Cuál sería un número entre estos dos? ¿Cuál es el número entero? [pasan tres minutos de silencio].
> J: ¿Cuál es la diferencia entre éste [.36] y éste [.37]?
> Alumno[a]: Un centésimo, ¿no?
> J: ¿Cómo lo pasamos a una fracción?
> A 1: 435 enteros y 375 centésimos.
> A 2: Milésimos.

Juan intentó ingresar al interactivo de fracciones y decimales, dio varias opciones incorrectas, y finalmente cerró el programa. En la clase no se llegó a alguna conclusión ni se aprovechó el ejercicio para discutir estrategias de cómo encontrar un número decimal entre otros dos dados o transformar un decimal en una fracción mixta.

Necesidad de cambio a partir de observar su propia práctica

En la sesión del taller, Juan describió a sus colegas lo sucedido en la actividad anterior de la siguiente manera:

> J: Teníamos que ingresar una cifra con milésimos, pero no se podía, ya no había espacio, el interactivo ya no te daba la opción para agregar otro nú-

> mero. Entonces, ahí fue donde yo tuve la dificultad, yo no lo había previsto (Quinta sesión, 27-1-2012).

Al momento de comunicar a sus compañeros la experiencia, Juan se sintió en confianza para presentar el video donde se evidencia lo sucedido. Él reconoció que, a pesar de ser un experto en el manejo de la computadora, no pudo resolver ni aprovechar dicha situación. Al respecto señala:

> J: A mí lo que sí me costó trabajo fue [...] el interactivo acerca de los números decimales en la recta [...] me faltó practicar más [...] porque [...] hubo una parte donde yo me desubiqué porque no tenía [clara] la manera de cómo manejarlo. Sí sé utilizar la computadora pero [...] creo que sería importante cuando utilicemos ese tipo de tecnologías, que nos demos el tiempo de trabajarlo antes, tomando en cuenta el contenido y la forma en que mejor lo entenderían los alumnos (Quinta sesión, 27-1-2012).

El profesor nota que un elemento importante es dedicarle tiempo a conocer los recursos tecnológicos para identificar sus potencialidades y restricciones, vinculado con el tema a enseñar. Cabe señalar que en una de las primeras sesiones del taller se comentó la relevancia de hacer este análisis de los recursos en la planeación. Para Juan esto sólo cobró sentido hasta que lo experimentó en su propia práctica. La necesidad de cambio surgió al verse en una situación frente a los estudiantes en la que no supo qué hacer, y en la que interpreta sus acciones como poco adecuadas.

Otro elemento que surgió en la observación de la propia práctica es la relevancia que se otorga al contenido matemático como eje para elegir el tipo de recurso en función de mejorar los aprendizajes de sus estudiantes, cuestión que al inicio del taller tampoco era considerada. Para Juan y sus colegas, el uso de los recursos tecnológicos estaba vinculado con la motivación, y por ello los recursos de su preferencia eran videos de YouTube.

Resultado de la experiencia anterior, los tres profesores planearon una nueva clase. En esta segunda ocasión trabajaron con un programa de Geometría Dinámica (Cabri) y en el aula de medios (una computadora para dos alumnos). El tema de la clase fue el trazo de *polígonos regulares inscritos en una circunferencia.* Juan, a diferencia de la clase anterior, promovió entre sus alumnos la exploración para resolver la tarea. Durante la actividad se acercó a cada equipo y, sin indicarles el procedimiento correcto a seguir, les planteó preguntas para que reflexionaran sobre las propiedades de la figura y así lograran resolver la actividad. Juan también logró integrar diferentes recursos (la geometría dinámica y el pizarrón tradicional) para promover discusiones relacionadas con el contenido geométrico en cuestión.

Cabe destacar el cambio que Juan presentó respecto a su función en el aula. Mientras que en la primera clase fue directivo y de control, después actuó como guía y mediador entre los contenidos, el artefacto recurso tecnológico (geometría dinámica) y los alumnos. Durante la segunda clase se observó que la reflexión, la autonomía de los estudiantes en el desarrollo de las tareas, así como la interacción en cada equipo y entre equipos, adquirieron mayor relevancia.

Se observa en este ejemplo cómo fue motivado el cambio en la práctica al experimentar con un recurso tecnológico nuevo en clase, que crea una situación en la que las acciones de Juan se interpretan como inadecuadas, reflexión que surge al observar el video de la sesión. Juan habló de la importancia de revisar la actividad con antelación, de centrar la planeación alrededor del contenido matemático y del aprendizaje de los alumnos. En la segunda sesión, Juan realiza acciones que no se habían observado antes.

Discusión con otros compañeros y con las investigadoras

En el primer proyecto, el trabajo colaborativo surge en dos momentos. Por un lado, en la planeación de sus secuencias de clase, los profesores comparten sus experiencias con sus colegas y con las investigadoras. Por el otro, en la reflexión sobre la práctica, interactúan de manera particular con las investigadoras, quienes fungen como expertas en el contenido matemático y en el uso de recursos tecnológicos. Del análisis de estas interacciones, se destaca otro factor que contribuye a la emergencia del cambio: *la reflexión a partir del intercambio con otros* (pares e investigadores).

Como se mencionó en el apartado anterior, era la primera vez que los profesores que participaron en el taller contaban con un espacio para compartir sus experiencias en el aula, así como realizar un trabajo colaborativo. Los maestros lo expresan de la siguiente manera:

> Miguel: No tenemos los espacios para que los que llegamos a utilizar la computadora nos acerquemos a los que no y les ofrezcamos opciones, y los que no la manejan se acerquen a los que sí para preguntarnos opciones […] yo he propuesto que se den esos espacios para compartir, […] llevo aquí dos años y medio y no se ha podido […] (Entrevista inicial, 24-6-2011).

> F: Compartimos experiencias sobre cómo manejar ciertos temas, pero sólo se da si te llevas bien con los compañeros […] (Entrevista inicial, 24-6-2011).

Como se evidencia en los extractos anteriores, los profesores participantes consideran relevante el trabajo colaborativo entre compañeros para compartir las experiencias. En la interacción generada en el taller, los profesores también proponen estrategias para usar internet como medio de comunicación, y construir colectivamente repositorios de actividades que pudieran facilitar el uso de TD en clases. Este es un indicador del interés y la necesidad de tener espacios para compartir experiencias con sus pares.

Si bien los profesores habían participado en cursos con “expertos” en distintas temáticas, la metodología propuesta en el taller, en el que el acompañamiento y seguimiento a sus prácticas con TD fueron permanentes, resultó ser un aspecto de gran valor para ellos:

> F: Va a ser muy bueno que nos permitan poner en práctica con nuestro grupo lo que aquí aprendamos, porque en otros cursos exponen una clase muestra y al principio no tenemos dudas, pero después ya no sabemos bien qué hacer y se pierde el contacto con los ponentes (Tercera sesión, 30-9-2011).

Sin embargo, la disyuntiva libertad/restricción en el diseño de actividades para sus prácticas docentes generó en principio conflictos para la mayoría de los profesores, pues esperaban actividades diseñadas por las investigadoras para que ellos las aplicaran, como es usual en algunos programas de capacitación. Así lo muestra el siguiente comentario de una maestra, en la segunda sesión del taller: "quiero que me digan qué debo tomar en cuenta para elegir un recurso […] sé que voy a ver ángulos, […] aquí en el libro vienen propuestas, algunas sí las he consultado y otras no, pero cómo puedo yo buscar materiales o bajar materiales". Este papel pasivo, promovido en cursos de formación, fue un aspecto que los profesores empezaron a cambiar en el taller.

Consideramos que el intercambio con sus colegas (diferentes puntos de vista, experiencia docente y conocimientos tecnológicos y matemáticos) les permitió rediseñar y construir estrategias de solución para algunas problemáticas de su práctica, como la relacionada con la integración de recursos digitales en una clase de matemáticas. Los profesores señalaron que el acompañamiento de las investigadoras y el trabajo colaborativo entre pares fue un elemento favorecedor para adquirir mayor confianza al usar diferentes tecnologías en sus clases.

> O: [...] formar parte de algo que no estás dominando en un alto porcentaje, siempre te genera incertidumbre, pero en la medida en que llevas acompañamiento, se te van facilitando […], yo creo que fue una experiencia

> buena porque [...] el trabajar en equipo te da mayor seguridad, realmente hay un intercambio con el compañero (Sexta sesión del taller, 27-1-2012).

Los participantes en el taller, en particular los tres profesores de sexto de primaria, reconocieron que las actividades desarrolladas con las investigadoras y sus colegas, así como la aplicación en sus aulas, fue una experiencia enriquecedora para su práctica docente. Como lo dice Fernanda, en la sexta sesión: "Es bueno escuchar las ideas de las personas [a diferencia] de lo que tú piensas, qué te puede funcionar, escucharlo de tus compañeros: ¡Ah! Oye sí, no había pensado eso".

En el diseño del taller el trabajo colaborativo constituyó uno de los objetivos a promover entre los profesores, esta propuesta surgió como una estrategia de trabajo entre ellos en las primeras sesiones. Una de las profesoras de sexto grado comentó lo siguiente en la segunda sesión: "Estaría bien trabajar una misma lección para ver cómo responden los niños a ese mismo tema, enseñando por cada uno de nosotros". Esta propuesta fue asumida por todos los participantes. Resultado de esta experiencia, los maestros destacan la importancia de los diferentes papeles y las aportaciones de los integrantes del equipo para realizar un trabajo colaborativo con la finalidad de mejorar las prácticas de enseñanza:

> O: Juan [...] domina [...] las funciones de la computadora [...], Fernanda tiene experiencia [para] realizar las actividades, también creo que les favoreció trabajar conmigo, por [...] el dominio de los contenidos [...] y [...] tú [la investigadora] [sugerías] por qué no buscamos aquí. Todo eso formó un equipo de trabajo más sólido (Sexta sesión del taller, 27-1-2012).

Cabe señalar que para los 14 profesores participantes, el libro de texto es el recurso que delinea sus acciones en sus clases, cuestión que coincide con lo encontrado por Ávila (2004). Sin embargo, surge la necesidad de reelaborar dichas acciones a seguir, al abordar un tema en el que se utilicen recursos digitales, pues este aspecto no está considerado en los materiales que emplean los profesores.

Los cambios que surgieron como resultado del trabajo colaborativo entre pares y expertos se vinculan con: *a)* la planeación colectiva de una misma lección; *b)* la importancia de planear las clases y cómo elegir los recursos a utilizar para lograr el aprendizaje de sus alumnos. Al respecto, los tres profesores comentan que las actividades fueron pensadas tomando como eje el contenido matemático, la disponibilidad de recursos y el momento adecuado (inicio, desarrollo o cierre) para integrar tecnologías digitales:

> O: Primero tuvimos que colaborar para seleccionar el tema [...] acorde al bloque que estábamos trabajando, los libros, el programa, y que no fuera un recurso que se aplicara de momento [sin objetivo], sino que fuera para iniciar, consolidar el tema [...]. La selección fue considerando un lenguaje adecuado para los niños, que fuera llamativa [...], pero eso nos cuestionó ¿al niño le servirá?, entonces fue que se decidió que cada quién, dependiendo de las necesidades de sus alumnos, lo implementaría en el momento más pertinente (Quinta sesión del taller, 27-1-2012).

Estas decisiones fueron más evidentes cuando utilizaron el programa de Geometría dinámica para el trazo de polígonos inscritos en una circunferencia.

En las entrevistas realizadas, como parte del segundo proyecto en el que nos encontramos trabajando, se identificaron momentos en que los profesores sugirieron posibles modificaciones en su práctica. Un ejemplo lo constituye la profesora Carmen (C), quien, según se pudo observar en las sesiones de las clases videograbadas, usualmente utilizaba materiales concretos con sus alumnos de tercero de primaria *después* de dar una explicación inicial de los conceptos matemáticos, que consideraba fundamentales para el tema abordado.

> C: Los niños necesitan tener las bases firmes para poder trabajar, por eso es importante que entiendan los fundamentos y por eso se los enseño (5/2013).

Durante una serie de conversaciones con una de las investigadoras (ML), Carmen empezó a considerar la posibilidad de invertir el orden en el que llevaba a cabo las clases. En una entrevista habló de la falta de sentido de usar material concreto para trabajar con medidas no convencionales, habiendo ya usado medidas convencionales en un contexto de medición de longitudes:

> ML: ¿Cómo crees que funcionó el uso del material concreto con el estambre?
> C: Pues ya viste que los niños, [a] algunos les cuesta mucho trabajo manipularlo.
> ML: ¿Cuál era el objetivo de trabajar con estambre? ¿Cuál fue tu idea?
> C: Pues que vieran cómo trabajar con medidas no convencionales.
> ML: ¿Y para qué trabajan con medidas no convencionales?
> C: Pues para que vean que no funcionan.
> ML: ¿Y luego ver unas que funcionan mejor?
> C: Pues sí.
> ML: Aunque la regla ya la saben usar[…] La usaron antes […]
> C: Sí, la verdad no tiene caso pero así viene […]
> ML: Primero la regla y luego el estambre […]
> C: Sí, pero realmente no tiene sentido, ¿sería mejor experimentar primero? (5-6-13)

En otra ocasión se habló de entender primero los conceptos. Durante la conversación, Carmen llegó a la conclusión de que las estrategias seguidas hasta el momento no necesariamente llevan al objetivo deseado, en este caso a una comprensión profunda de los conceptos.

> C: Ellos necesitan entender primero los conceptos.
> ML: ¿Esto te ha funcionado? Es decir, ¿los entienden?
> C: Pues no, como viste hay muchos niños que están perdidos, no entienden nada.

Más aún, Carmen concluyó en esta conversación que el hecho de poder, de manera hipotética, realizar todo lo deseado (resolver más ejercicios) no garantizaba el aprendizaje:

> ML: ¿Por qué crees que esto sea así? [Que los niños no entienden].
> C: Porque les faltan las bases, necesitan más ejercicios de práctica y tener buenas bases para después resolver problemas más difíciles.
> ML: Y cuando hacen muchos ejercicios, ¿entienden?
> C: No, ja ja ja, tampoco [...] no sé , ja ja ja

Entonces Carmen, al ser invitada a pensar en estrategias alternas, contempla la posibilidad de utilizar el material concreto para la construcción de los conceptos. Esto, sin embargo, le hace sentir que de alguna manera puede perder el control del resultado:

> ML: ¿Cómo crees que esto pueda modificarse? ¿Qué estrategias nuevas te gustaría intentar? ¿Cómo podría lograrse que comprendieran mejor?
> C: Lo que pienso es, tal vez, experimentar más con ellos antes, pero quien sabe si sirva porque puede ser que se pierdan.

Después de varias pláticas con la investigadora, Carmen decide planificar una sesión en la que pueda trabajar con material concreto al inicio de la clase. Aunque después de la sesión no estaba convencida del todo de los resultados, en entrevista opina que está dispuesta a explorar más este acercamiento:

> ML: ¿Cómo sentiste que te fue en la clase de fracciones?
> C: La verdad, ¡no sé! Hubo un poco de descontrol, no sé qué tanto aprendieron, y sentí que estuvo muy larga, pero pues me gustaría seguir probando a ver qué pasa. La verdad es que de todas formas estamos medio en el hoyo.

En este caso, es posible observar cómo se genera el cambio al darse cuenta la profesora, en conversaciones respecto a las acciones realizadas en clase, de que las estrategias no funcionan de manera adecuada y, más sobre todo cuando las estrategias "deseables" al analizarse, resultan también insuficientes. De aquí surge la necesidad de buscar un cambio de estrategia y de ponerla en práctica. Si bien los resultados son inciertos, tener la idea de "estar en el hoyo", es decir, de que lo que se hace no es del todo efectivo, constituye un fuerte motor de cambio.

Los maestros suelen tener datos acerca del desempeño de sus alumnos, y con frecuencia conocen los resultados de pruebas en las que no se obtiene lo deseable. Aun teniendo esta información, con frecuencia el cambio no se genera. Consideramos que la posibilidad del cambio de estrategia surge cuando el profesor cuenta con un espacio para hablar de lo que sucede en el aula y, en este caso, interactuar con un interlocutor con experiencia en el tema.

Conclusiones y comentarios finales

En este capítulo presentamos ejemplos de dos experiencias en México, en las que pudimos observar el surgimiento de necesidades de cambio, en la práctica docente mediante la interacción y el trabajo colaborativo, tanto entre los profesores como entre profesores e investigadoras. Lo anterior se dio en un contexto de introducción de herramientas tecnológicas en el aula y a partir de la planeación conjunta de actividades y de la reflexión de la propia práctica. El trabajo constituye una aportación en el área de la investigación del cambio de las prácticas de enseñanza de las matemáticas por parte de los profesores de primaria quienes, según se mencionó antes (Ávila, 2004; Block *et al.*, 2007), suelen conservar sus estrategias de enseñanza a pesar de las reformas educativas y de los cambios en los planes y programa.

En los ejemplos presentados en el apartado anterior, la perspectiva enactivista nos ayudó a explicar la manera en que dos profesores modificaron sus prácticas al identificar una necesidad auténtica de cambio, surgida a partir de una historia de interacciones. Como resultado de sus experiencias, tanto al reflexionar sobre su propia práctica como al interactuar con colegas y con las investigadoras, Juan y Carmen detectaron que algunas de sus estrategias y acciones eran poco adecuadas y entonces buscaron modificarlas. Si bien con frecuencia los profesores están conscientes de que el desempeño de sus estudiantes no es el adecuado, observamos cómo la necesidad de cambio en la práctica emerge al reflexionar sobre la práctica y al intercambiar ideas con otros profesores y con investigadores.

Conviene destacar que desde el enactivismo es imposible que con alguna interacción –por ejemplo, una conversación, la asistencia a una conferencia o el contacto con determinada herramienta en el aula– se provoque un cambio específico en un individuo. Esto significa que ciertas interacciones pueden originar o motivar cambios que estarán especificados por la estructura del individuo en un momento determinado. Dicha estructura, a su vez, es resultado de la historia del individuo, es decir, de todas las experiencias del sujeto. Lo anterior nos ayuda a comprender que no podemos asegurar el tipo de cambio que surgirá a partir de interacciones entre profesores y con investigadores, pero sí nos permite explorar la emergencia del cambio cuando se detectan estrategias y acciones poco adecuadas.

En ninguno de estos dos proyectos, se caracterizaron buenas prácticas no se precisaron como "buenas" por parte de las investigadoras con el propósito de que los profesores las replicaran. La intención en ambos casos fue invitarlos a reflexionar acerca de sus acciones en el aula para que encontraran, junto con las investigadoras y con sus colegas, instancias en las que podían realizar cambios en su práctica en beneficio del aprendizaje de los alumnos.

Los resultados nos permitieron observar que con frecuencia para generar el cambio requiere estar en un lugar de incertidumbre, de soltar lo conocido y de no saber exactamente cuál será el resultado. Se requiere también "resiliencia" para poder llevar a cabo cambios en las prácticas. En esta línea, nuestra investigación reafirma y complementa lo señalado por Block *et al.* (2007), en términos de que cuando el profesor se enfrenta a un conflicto pueden generarse cambios, sólo si el sujeto se da cuenta de ello. Este conflicto, en nuestro caso, surge como resultado de la experiencia en el diseño, implementación y rediseño de actividades para sus clases de matemáticas con uso de tecnologías digitales. De manera complementaria a lo encontrado por Cuban (2000) y Ruthven (2009), quienes señalan la importancia de la participación activa de los profesores en el diseño de las actividades y su relación con el cambio en la práctica, en este capítulo se destaca la emergencia del cambio como resultado de la colaboración con sus colegas y con expertos, al reflexionar sobre la propia práctica y notar aquellas acciones inadecuadas.

Los resultados encontrados en este estudio destacan el trabajo colaborativo cercano al profesor, sus características, su historia y su contexto local como una vía para lograr cambios en las prácticas de enseñanza. Se pone en evidencia la generación colectiva de estrategias sin imponer acciones particulares. De igual manera, los resultados ponen en cuestionamiento las estrategias de formación de profesores, como las estandarizadas, masivas, impositivas y de corta duración, cuyo objetivo es lograr cambios superficiales. Es posible observar cambios que impacten de manera significativa en el aprendizaje de los alumnos cuando se toman en cuenta la complejidad y la individualidad del proceso de desarrollo profesional del docente.

Referencias

Ávila, A. (2004). La reforma realizada. Balance y lecciones para el futuro. En Ávila, A. (Directora). *La Reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas.* SEP. Informes de investigación. Temas selectos.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M. y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *RMIE, 12*(33), 263-294.

Climent, N., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M., & Carrillo, J. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las ciencias*, *25*(1), 33-44.

Cuban, L. (2001). *Oversold & Underused. Computers in the Classroom*. Cambridge: Harvard University Press.

García, E. (2012). Desarrollo profesional y enseñanza de las matemáticas en sexto grado de educación primaria: el papel de la mediación de tecnologías digitales. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo. México: UPN.

http://www.snie.sep.gob.mx/Estad_E_Indic_2011/Cifras_REPMEX_2011.pdf, consultado el 10 de agosto de 2013.

Maturana, H. (1987). 'Everything is Said by an Observer'. En: W.I. Thompson (ed.) *GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology*. Hudson, N.Y.: Lindisfarne Press, pp. 65-82.

Maturana, H. & Varela, F. (1992). *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*. Revised Edition. Boston: Shambala.

Ruthven, K. (2009). Towards a naturalistic conceptualisation of technology integration in classroom practice: The example of school mathematics. *Education y Didactique*, *3*(1), 131-152.

Sandoval C., I. (2013). Tecnologías digitales en prácticas de enseñanza de las matemáticas. En: Preciado, Solares, Sandoval & Butto (Eds.). *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary*. Calgary, Canada: Faculty of Education of the University of Calgary.

Trigueros, M., Lozano, M. D. & Sandoval, I. (2014). Integrating Technology in the Primary School Mathematics Classroom: The Role of the Teacher. En: Clark-Wilson, A.; Robutti, O y Sinclair, N. (Eds). *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development*, *2* (Springer), 111-138.

CAPÍTULO V / CHAPTER V

CAMBIOS EN EL CONOCIMIENTO SOBRE LA PROPORCIONALIDAD. UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE DOCENTES EN SERVICIO

Carmen Oliva Gutiérrez, Alicia Ávila Storer

RESUMEN

Presentamos los resultados de una experiencia de formación continua en la que trabajamos el tema de *la proporcionalidad y su enseñanza*, con el fin de caracterizar los procesos de cambio en el conocimiento de los profesores participantes, e identificar las características y condiciones de la experiencia favorables al cambio. Sustentamos la investigación en dos ideas principales: *a)* si los profesores se acercan a los contenidos matemáticos que deben enseñar, mediante la resolución de problemas y el intercambio de ideas en torno a su resolución, pueden modificar y enriquecer los conocimientos matemáticos y pedagógicos implicados; *b)* la participación del conjunto de los profesores de una escuela favorece cambios en el conjunto de la comunidad escolar. Los resultados permiten confirmar nuestra primera idea; de la segunda tenemos sólo algunos indicios.

Palabras-clave: proporcionalidad, formación y actualización de maestros, educación primaria, construcción social del conocimiento.

Abstract

Here we present the results of a continuous formation experience where we worked with *proportionality and its teaching*. We based the research in two basic ideas: the first one was that if teachers get nearer the mathematical content that they have to teach, through problem resolution and exchanging the ideas used for its resolution, they can modify and increase their mathematical and pedagogical knowledge implied; the second was that the participation of all teachers in a school promotes changes in the scholarly community as a whole. Our results allow us to confirm our first idea, but for the second we have just some circumstantial evidence.

Introducción

En el presente capítulo damos cuenta de un proceso de formación continua de profesores al interior de una escuela pública en la Ciudad de México, donde se trabajó el tema *La proporcionalidad y su enseñanza* con el conjunto de los docentes. La investigación, de corte cualitativo, se realizó dentro del programa de posgrado de la Universidad Pedagógica Nacional, en un momento en que los profesores de educación básica y su quehacer son cuestionados debido a los bajos puntajes que los estudiantes han obtenido en las pruebas nacionales e internacionales de matemáticas. El trabajo se basa en la premisa, ya internacional, de que la formación continua de los profesores en servicio es un elemento indispensable para mejorar la práctica docente y el aprendizaje de los alumnos. También consideramos que no cualquier tipo de formación es pertinente, y que no todas las condiciones de su implementación son igualmente productivas. Aquí tratamos de ofrecer elementos para identificar algunas condiciones favorables a dicha formación.

La formación continua de profesores en México

Perspectiva de la Secretaría de Educación Pública

La Secretaría de Educación Pública (SEP) creó en 1995 el Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica (Pronap), con el propósito de ofrecer distintas experiencias de formación y, de este modo, mejorar la calidad de la educación. Para matemáticas se diseñó el curso nacional "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", el cual proyectó preparar a los profesores para que respondieran a las nuevas demandas didácticas del enfoque de enseñanza de dicha disciplina. Este curso dejó de ofrecerse hace varios años.

En la actualidad existe una oferta reducida de cursos de actualización en matemáticas. Del total de títulos registrados en el año 2012 (1115) sólo 50 corresponden a esta área, y la mayoría (32) busca actualizar a los docentes en el enfoque por competencias, introducido con la reciente reforma a la educación básica (SEP, 2011). Estos cursos, aunque son un requisito para evaluar a los docentes en el programa Carrera Magisterial,[1] son opcionales.

[1] Programa establecido en México en 1993 para apoyar a los docentes económicamente por su trabajo y actualización. Para ingresar o ascender en cualquiera de sus cinco niveles [A, B, C, D y E], los profesores deben cubrir una serie de requisitos: permanencia en el nivel [tres o cuatro años], antigüedad, preparación profesional, cursos de actualización, desempeño profesional [trabajo realizado durante un ciclo escolar], aprovechamiento escolar [examen a sus alumnos]. El puntaje mínimo para promoción varía cada año.

La SEP considera la formación continua de los profesores como:

> Un conjunto de actividades que permite desarrollar nuevos conocimientos y capacidades a lo largo de su ejercicio profesional y perfeccionarse después de su formación inicial. Consiste en la actualización y capacitación cultural, humanística, pedagógica y científica con el fin de mejorar permanentemente su actividad profesional (SEP-SEBYN-CGAYCMS, 2006).

Desde tal perspectiva, podemos afirmar que en México no existe una oferta suficiente de formación en matemáticas y su enseñanza para los profesores de educación primaria en servicio. Por otra parte, caben las siguientes preguntas: ¿estos programas, o al menos algunos de ellos, han logrado cambios y mejoras en la práctica cotidiana de los profesores?; de existir esas mejoras, ¿cuáles son las características de los cursos que parecen favorecerlas? Estas preguntas –aún sin respuestas claras– justifican experimentar propuestas que contribuyan a mejorar los aprendizajes matemáticos que, por ahora, son bastante magros, según las diversas pruebas nacionales e internacionales aplicadas a los alumnos de educación básica (Excale, ENLACE y PISA). [2]

Importancia de la formación continua en matemáticas

Desde hace más de tres décadas la preparación de los docentes se ha considerado un factor importante para mejorar el aprendizaje escolar. En México, algunos investigadores sugieren trabajar con los profesores para mejorar sus conocimientos, tanto disciplinares

[2] En la competencia matemática que mide la prueba PISA, México se sitúa en el nivel 1 (el más bajo) con 419 puntos, obtenidos en 2009. Con este puntaje, de acuerdo con la OCDE, un poco más de la mitad de los estudiantes que terminan la primaria sólo son capaces de resolver preguntas muy bien definidas, con instrucciones directas en situaciones explícitas (SEP, 2011a).

como pedagógicos, pues señalan que la mayoría de ellos no cuenta con una formación sólida en matemáticas (Block, 1995; Ávila, 2006; Parada, Figueras y Pluvinage, 2009).

Respecto del manejo de la proporcionalidad, quien ha explorado el conocimiento de algunos docentes sobre este tema, reporta que dichos conocimientos son 'imprecisos' o 'insuficientes' (ver Block, 2006).

Asimismo, la observación de la actividad matemática en aulas de escuelas comunes, ha llevado a señalar que profundizar el conocimiento de los conceptos vinculados a la proporcionalidad, por parte de los docentes, puede potenciar las acciones constructivistas de aquéllos interesados en desarrollar desde este enfoque el pensamiento proporcional en sus alumnos, pues el dominio del tema determina, en buena medida, las tareas que propondrán en sus clases de matemáticas (ver Ávila, 2006). Es decir, que los procesos de formación ofrecidos a los profesores sobre el tema que nos ocupa, no han sido satisfactorios según los resultados obtenidos.

La proporcionalidad como contenido escolar

Los profesores en servicio tienen como referente principal los desarrollos curriculares plasmados en programas y libros de texto. El aprendizaje de la proporcionalidad directa (en adelante, proporcionalidad) en el currículo de educación primaria en México, se propone en forma explícita a partir del cuarto grado (SEP, 2011).[3] Empero, a pesar de que los profesores la consideran un tema importante (Gutiérrez, 2008) dado el tiempo que se le dedica en las escuelas, las pruebas estandarizadas (PISA, Excale y ENLACE) mues-

[3] La secuencia y el enfoque de enseñanza de las proporcionalidad a la que nos referimos se planteó ya en los programas y libros de texto incorporados en la reforma de 1993 (SEP, 1993); dicho enfoque y secuencia fueron retomados con algunas modificaciones en la reforma de 2011 (SEP, 2011).

tran que las habilidades matemáticas ligadas a la proporcionalidad no se desarrollan de manera satisfactoria en los alumnos. Por ejemplo, en la última prueba Excale, aplicada a niños de sexto grado de primaria, de la que se tiene información pública (INEE, 2009), los promedios de aciertos son bastante insatisfactorios.

Contenido del reactivo	Porcentaje de aciertos
Identificar la relación entre los datos de una tabla de variación proporcional	79%
Resolver problemas que impliquen calcular un valor faltante en tablas cuando el factor de proporcionalidad es decimal	71%
Reconocer una tabla de variación proporcional	69%
Identificar la relación entre los datos de una gráfica de variación proporcional	62%
Resolver problemas de variación proporcional	57%
Resolver problemas de valor faltante en tablas, con factor de proporcionalidad fraccionario.	52%
Interpretar la información de una gráfica de variación proporcional	47%
Identificar la tabla de variación proporcional correspondiente a una gráfica	44%
Resolver problemas mediante tablas de variación proporcional	23%

Figura 1. Porcentajes de aciertos en reactivos de la prueba Excale 6 (ciclo 2008-2009), vinculados a la proporcionalidad.

Es probable que los porcentajes anotados en los primeros renglones de la tabla no se consideren deficientes; sin embargo, al incorporar en los problemas razones fraccionarias u otro tipo de dificultades (como distractores, o planteamientos menos directos), los porcentajes bajan drásticamente.

Desde hace tiempo sabemos que el desarrollo del pensamiento proporcional implica un largo proceso que culmina con la comprensión y el uso significativo de la constante de proporcionalidad.[4]

[4] No nos referimos aquí al enfoque piagetano, que definió de otra manera el dominio de la proporcionalidad, sino a las ideas que han arrojado los enfoques de orientación más didáctica.

En dicho proceso, el uso de relaciones internas (relaciones al interior de cada una de las magnitudes involucradas) para interpretar y solucionar los problemas es el más intuitivo. Lograr que los alumnos utilicen la relación funcional de manera significativa para resolver este tipo de problemas, requiere un proceso de enseñanza intencionado, que conlleva una modificación sistemática de los problemas que se planteen, tanto en las relaciones implicadas como en la forma de su presentación.

Ante estas consideraciones, la promoción del aprendizaje de la proporcionalidad en la primaria mexicana se inicia con la resolución de problemas sencillos del tipo valor faltante, que es posible resolver mediante estrategias basadas en el manejo de relaciones internas o escalares (ver Vergnaud, 1985), y a partir del cálculo de mitades, dobles, triples, etc., de las cantidades involucradas. Posteriormente, se promueve la solución de problemas un poco más complejos, mediante el uso de lo que Fernández, Llinares y Valls (2011) llaman 'enfoque constructivo' (fundamentado en la propiedad $f(x+y) = f(x) + f(y)$).

El uso de este enfoque genera estrategias más elaboradas que la simple duplicación, triplicación, o división por dos de los valores conocidos. Estas estrategias se basan también en relaciones escalares, pero las soluciones se obtienen mediante composiciones (sumas o restas) de los valores conocidos y/o de las mitades y dobles de esos valores al interior de una magnitud, para después hacer lo mismo con los valores correspondientes en la otra magnitud.

Así, de manera progresiva se modifican las situaciones propuestas para que los alumnos exploren nuevas formas de solución hasta que sea indispensable hacer uso de la constante de proporcionalidad para obtener las soluciones, cuestión que se propone en los últimos grados de la educación primaria.

Por otra parte, el hecho de que las razones (internas o externas) sean enteras o fraccionarias también entraña niveles de dificultad diferentes en las que son necesarias estrategias distintas para la resolución (Vergnaud, 1985). Este es otro aspecto considerado en los programas y libros de texto de matemáticas para diseñar las secuencias de actividades y problemas, y con ello promover el aprendizaje de la proporcionalidad.

Como podrá verse, el enfoque propuesto desde 1993 en programas y libros de texto es complejo, y en los programas de actualización docente estas cuestiones no se han tratado con suficiente profundidad. Nuestra hipótesis al iniciar el trabajo, del que deriva este escrito, era que los profesores no contarían con los conocimientos matemáticos especializados necesarios, ni con una "mirada didáctica" (ver Fernández, Llinares y Valls, 2011) aguda para gestionar con éxito las tareas matemáticas derivadas de él.

La investigación

La investigación se realizó con base en un proceso de formación de profesores en servicio que llamamos *La proporcionalidad* (como conocimiento matemático escolar) *y su enseñanza* (conocimiento pedagógico), el cual se diseñó en forma de taller en una escuela primaria pública de la Ciudad de México.[5]

Durante el desarrollo del taller analizamos los procesos de cambio en el conocimiento de los profesores, y las condiciones que favorecen dicho cambio. Elegimos la proporcionalidad porque, como ya lo señalamos, en la oferta de cursos de actualización es un tema casi ignorado y, además, los profesores participantes manifestaron interés por estudiarlo pues, según la opinión dominante, los alumnos no lo comprenden con facilidad, y esto dificulta su enseñanza.

Posteriormente, se analizó el proceso de aprendizaje de los participantes en dos vertientes: *a)* la correspondiente a la proporciona-

[5] En adelante, para simplificar el lenguaje, nos referiremos al conocimiento matemático escolar (o conocimiento especializado sobre el contenido, en los términos de D. Ball y sus colegas, 2008), simplemente como conocimiento matemático, o conocimiento del contenido.

lidad como conocimiento matemático escolar, y *b)* el conocimiento pedagógico sobre el tema (elementos para su enseñanza).

La planeación, desarrollo y análisis del proceso de formación se sustentó en los siguientes supuestos:

1. Los conocimientos matemáticos y pedagógicos sobre la proporcionalidad con que cuenta la mayoría de los docentes participantes, no son suficientes para implementar el enfoque y la secuencia didáctica propuestos en el currículum oficial.
2. Los contenidos que los profesores deben enseñar son de su especial interés, lo que motiva la participación activa en los procesos de formación que abordan dichos contenidos.
3. El intercambio de ideas y el análisis de experiencias al resolver problemas vinculados al currículum, con la participación de "alguien que sabe más", producirá modificaciones positivas en los conocimientos de los profesores participantes.
4. Un proceso de formación compartido por el conjunto de docentes de una misma escuela, resultará más provechoso que aquél realizado en forma individual o en grupos de docentes de diversas escuelas.
5. El cambio en los conocimientos disciplinares y pedagógicos que se logren mediante este proceso de formación, favorecerá no sólo en las prácticas de enseñanza de cada uno de los docentes, sino también en su participación en la comunidad de profesores constituida al interior de la escuela.

Características del proceso de formación

- El taller se efectuó dentro de la jornada laboral: siete reuniones de 2 horas 30 minutos cada una, realizadas el último viernes del mes, aprovechando la sesión del Consejo Escolar.
- Se trabajó con base en resolución de problemas orientados a ampliar la comprensión de la proporcionalidad y su enseñanza.

- Se planearon actividades, estrategias y materiales que promovieron el análisis del tema y de la práctica de enseñanza de los profesores.
- Con el fin de incluir aspectos conceptuales que acompañaran los avances en el aprendizaje, se analizaron artículos cortos y de fácil lectura sobre la proporcionalidad, su aprendizaje y su enseñanza. De hecho, adaptamos o recortamos algunos ya publicados para hacerlos más accesibles a los participantes, ya que en una encuesta previa detectamos poco interés por los cursos que incluyeran lecturas.
- Se realizaron también actividades vinculadas a las tareas profesionales de los profesores (Llinares, en Giménez *et al.*, 1996): análisis de libros de texto, planeación de actividades y secuencias de enseñanza.
- El trabajo se organizó de manera individual o en pequeños grupos, después los docentes compartían resultados y elaboraban conclusiones en sesión colegiada.
- La función de la coordinadora del taller consistió en proponer situaciones y actividades de aprendizaje, promover la reflexión, incorporar aspectos conceptuales vinculados a las tareas realizadas, así como la discusión en los pequeños grupos y en las sesiones colegiadas; también realizaba una síntesis de los conocimientos trabajados en cada sesión.

Conceptos vinculados a la proporcionalidad trabajados en el taller

Los conceptos abordados se definieron con base en nuestras hipótesis acerca de los aspectos de la proporcionalidad, que es importante conocer en tanto conocimiento matemático escolar. Estos aspectos son los siguientes: comparación absoluta y relativa, razón, proporción, relación escalar y funcional, constante de proporcionalidad, gráficas de situaciones proporcionales y no proporcionales, así como tablas de variación proporcional y su utilidad para aprender y enseñar este contenido; también se analizaron algunas estrategias de enseñanza y los procesos cognitivos de los niños respecto al aprendizaje de la proporcionalidad.

Como ya hemos señalado, en el taller se incluyó lo que suele llamarse conocimiento matemático escolar y conocimiento pedagógico del contenido (en este caso, sobre la proporcionalidad). El primero se refiere al contenido matemático en sí, pero no al contenido que cualquier persona maneja, sino a una forma específica que lo convierte en objeto escolar, tal como lo señalan Hill, Ball y Schilling (2008), mientras que el segundo conocimiento implica el contenido en relación con los alumnos y con los recursos para ayudar al aprendizaje: cómo lo aprenden, qué dificultades tienen para aprenderlo, qué errores cometen al acercarse a dicho conocimiento, así como las formas en que es posible ayudarlos para que lo aprendan de manera adecuada (ver Hill, Ball y Schilling, 2008).

En este escrito presentamos sólo el análisis del conocimiento matemático de la proporcionalidad que fueron construyendo los profesores participantes. Para hacerlo, nos basamos en el discurso que se fue elaborando en torno a dicho tema durante el taller.

Algunos datos sobre la escuela e intereses de los profesores participantes

La escuela donde se llevó a cabo el taller es de tiempo completo,[6] y se eligió por la disposición del grupo docente para participar en la experiencia. La escuela está inscrita en el Programa Escuelas de

[6] Las escuelas de tiempo completo son un modelo educativo que pretende, con la ampliación del horario –8:00 a 16:00 horas–, modificar las prácticas escolares al trabajar con la participación activa de los alumnos y llevar a cabo actividades de actualización docente en las reuniones de Consejo Técnico.

Calidad[7] y goza de "buena fama" en su zona escolar; los resultados que ha obtenido en la prueba ENLACE son superiores a los 580 puntos.[8] Tiene 14 docentes frente a grupo, sólo dos son varones, cinco cuentan con estudios de licenciatura, 10 están inscritos en el programa Carrera Magisterial y 12 tienen más de 20 años de servicio. Todos manifestaron interés en actualizarse, pero no tienen tiempo libre para ello; la mitad sugirió programar cursos o talleres dentro del horario laboral; todos propusieron cursos prácticos (dinámicos, con actividades para aplicar en su grupo). Los profesores manifestaron interés por recibir material, estrategias y actividades útiles para la enseñanza; la mitad sugirió "poca teoría", y cinco profesores prefieren "sin teoría"[9] (ver Gutiérrez, 2008). Estos resultados coinciden con otros estudios hechos en México (por ejemplo, Estrella, 2003; Díaz, 2006). Por tanto, consideramos conveniente tomarlos en cuenta al plantear el proceso de formación.

Actividades trabajadas en las sesiones del taller

Las sesiones del taller se planearon con actividades para enriquecer el conocimiento matemático y pedagógico de los participantes, y motivar el análisis de la práctica docente. En cada sesión se propuso:

a) la resolución de un problema que implicara la noción de proporcionalidad;
b) análisis de la forma en que cada uno lo resolvió y la elaboración de hipótesis sobre cómo lo resolverían sus alumnos;

[7] Programa que pretende mejorar los resultados educativos mediante apoyos adicionales a los planteles.
[8] Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). El puntaje máximo es de 800 puntos y es un deseo oficial no cumplido que las escuelas alcancen 600 puntos.
[9] Por 'teoría' se referían a textos que aborden conceptos matemáticos o didácticos, pero sin actividades que puedan aplicarse en el aula.

c) formulación de preguntas adecuadas para el grado que atienden, útiles para promover en los niños la comprensión de los problemas y su resolución, y
d) lectura de un texto breve para aclarar o complementar el conocimiento especializado sobre proporcionalidad.

La planeación y desarrollo de las actividades se adaptaron, incluso se modificaron, después de analizar los resultados de cada sesión.

Recolección de evidencias

Para la recolección de evidencias se realizaron las siguientes actividades:

- Aplicación de un cuestionario inicial (a manera de un diagnóstico).
- Videograbación de cada sesión.
- Recolección de tareas escritas (problemas resueltos, observaciones al trabajo de sus alumnos y descripciones de su práctica).
- Evaluación de cada sesión para apoyar la planificación de las siguientes.
- Cuestionario final como evaluación general del taller.

El discurso de los docentes que se generó en cada sesión sobre el conocimiento de la proporcionalidad, fue un insumo fundamental para la indagación sobre sus procesos de aprendizaje. El conocimiento inicial, así como las modificaciones en éste, lo ponderamos con base en dicho discurso. Para efectuar el análisis, procedimos de la siguiente manera: se ordenaron cronológicamente fragmentos del discurso que mostraran tanto los intercambios ocurridos como el proceso de cambio que tuvo lugar. La selección de los fragmentos se realizó considerando que éstos:

a) tuviesen significado en sí mismos, es decir, que expresaran ideas completas sobre el tema;
b) refirieran a la proporcionalidad en tanto conocimiento matemático escolar y fueran relevantes en función de los objetivos de la investigación;
c) permitieran comparar las ideas iniciales con las que se fueron construyendo a lo largo del proceso.

Cambios observados en el conocimiento sobre la proporcionalidad

Ideas iniciales de los docentes: dificultades para identificar situaciones proporcionales y no proporcionales

Con el fin de identificar el conocimiento de los profesores acerca del tema, al iniciar el taller resolvieron en forma individual un cuestionario, cuyos resultados se discutieron después. En ese momento, los profesores tuvieron dificultades importantes para: 1) diferenciar situaciones de proporcionalidad de otras que implicaban comparaciones aditivas; 2) utilizar adecuadamente estrategias convencionales de solución de los problemas planteados; 3) identificar, de entre varias gráficas, aquellas que representaban una situación de proporcionalidad de otras que no tenían una relación de este tipo entre los datos.

Pocos profesores se consideraron conocedores del tema (4 de 13), el resto manifestó no estar familiarizado con él porque no lo trabajaban con su grupo:

> "Ahorita me costó trabajo resolver los problemas porque atiendo segundo grado."
> "Durante mucho tiempo he dejado de dar clase a quinto y sexto, son[…] como temas nuevos para mí."
> "Es un tema 'nuevo' para los que no atienden quinto y sexto grados, por ello es también un tema difícil de explicar."

Llama la atención que estas respuestas provengan de profesores de tercero y cuarto grados, puesto que el tema se inicia en este último mediante tablas de valores proporcionales.

En los hechos, el conocimiento de todos los profesores participantes fue insuficiente para trabajar el enfoque propuesto en programas y libros de texto. Una muestra de esto es que, como se comentó antes, en general no diferenciaron, de entre varios problemas, los vinculados a la idea de proporcionalidad y los que implicaban una comparación aditiva.

El problema 1 (ver figura 2), por ejemplo, implica una comparación de razones (para concluir que las velocidades no son iguales). Sin embargo, los docentes no consideraron resolverlo mediante la idea de proporcionalidad y, en general, fracasaron en sus intentos de resolución. En cambio, se clasificó como de proporcionalidad el problema 2.

<table>
<tr><th>Problema 1</th><th colspan="6">Problema 2</th></tr>
<tr><td rowspan="3">“Marcos es ciclista y recorre 25 km en 20 minutos. Lucía también es ciclista y recorre 20 km en 15 minutos. ¿Quién lleva mayor velocidad?”</td><td colspan="6">“Observa la tabla y contesta: ¿Cuántos años tendrá Pedro cuando Juan tenga 24 años?”</td></tr>
<tr><td>Edad de Juan</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Edad de Pedro</td><td>12</td><td>16</td><td>24</td><td>28</td><td>?</td></tr>
</table>

Figura 2. Problemas planteados en el cuestionario al inicio del proceso de formación.

La conservación de una relación aditiva –como la que existe entre las edades de Juan y Pedro– fue suficiente a los docentes para considerar que la situación era proporcional. Tal vez presentar los datos en una tabla favoreció esta interpretación, puesto que según nos percatamos después, los docentes le dan gran valor a las tablas para enseñar la proporcionalidad, ya que en los libros de texto este recurso aparece con frecuencia en esta clase de problemas.[10]

[10] Las dificultades para identificar ciertos problemas como de tipo aditivo por parte de maestros en formación, ha sido reportada por otros investigadores (Fernández, Llinares y Valls, 2011), y la hemos constatado en un proceso de formación de docentes en servicio que realizamos actualmente. Parece entonces necesario profundizar en torno a las causas que provocan dicha dificultad.

La representación gráfica de una situación proporcional (o no proporcional) resultó ser otro tema desconocido para la mayoría de los profesores participantes, quienes tampoco clasificaron de manera correcta (como representación de una situación de proporcionalidad o de no proporcionalidad) las siguientes gráficas:

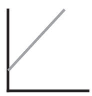
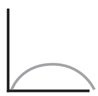
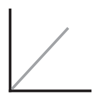
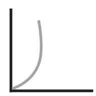
Viaje en taxi	Lanzar una piedra	Precio de un producto	Número de amibas
Tarifa en pesos	Altura	Peso	# de amibas
			
Distancia en metros	Tiempo	Costo	Tiempo

Figura 3. Gráficas y situaciones incluidas en el cuestionario inicial del taller.

En resumen: al iniciar el proceso de formación, los profesores mostraron poco conocimiento respecto de las situaciones que implican proporcionalidad, así como dificultades importantes para diferenciar de aquéllas los problemas que presentaran relaciones aditivas. Las dificultades también se observaron en la representación de las situaciones mediante gráficas.

Inicios en el cambio de conocimiento: diferenciación entre la comparación aditiva y la multiplicativa y desarrollo de algunas estrategias de solución

La interacción en torno a los primeros problemas planteados marcó los inicios del cambio en las ideas de los profesores sobre la proporcionalidad. La discusión se centró en los dos problemas que se incluyen en la figura 4:

Problema 3	Problema 4
a) "Ana quiere comprarse unas calcetas que valen 20 pesos. Su madre queda con ella que pagará 2 pesos por cada 3 que pague Ana. ¿Cuánto dinero debe poner Ana para comprarse las calcetas?"	*b)* "Hace 5 años un árbol de mangos medía 8 m y un árbol de naranjas medía 10 m, en la actualidad el árbol de mangos mide 14 m y el de naranjas mide 16 m. Después de cinco años, ¿qué árbol ha crecido más?, ¿qué árbol consideras que ha tenido un crecimiento más lento en estos cinco años?"

Figura 4. Problemas propuestos al iniciar el proceso formativo.

El problema 3 es del tipo que Lamon (1993, cit. por Alatorre, 2004) llama *parte-parte-todo,* en su definición refiere a contextos en los que la cardinalidad de un subconjunto se da en términos de las cardinalidades de dos o más subconjuntos de los que está compuesto el todo.

El problema 4 presenta otras características: busca hacer notar la diferencia entre la comparación absoluta (aditiva) y la relativa (razón) y entre las cantidades, y propicia que los participantes valoren, en una situación concreta, el sentido de ambas comparaciones y la relevancia de diferenciarlas.

Al resolver los problemas, los profesores mostraron que conocen (en acto) y utilizan mejor las relaciones entre un mismo tipo de cantidades (razones internas) y la comparación absoluta, mientras que se les dificulta la comparación relativa y las relaciones funcionales (relaciones entre los dos tipos de cantidades involucradas); nadie utilizó alguna estrategia que permitiese suponer atención en esta última relación.

El problema 3, cuya estructura proporcional parecía más evidente, se resolvió con cierta facilidad haciendo uso de estrategias intuitivas, como la sustentada en la elaboración de una tabla de valores proporcionales (ver figura 5).

Ana	Mamá de Ana	Dinero reunido para las calcetas
3	2	5
6	4	10
9	6	15
12	**8**	**20**

Figura 5. Solución al problema 3 "Las calcetas de Ana".

La facilidad del problema fue expresada por más de un participante:

> [Este problema es] uno de los más sencillos porque para resolverlo es con una tabla de variación proporcional. Cuando Ana ponga tres pesos su mamá pone dos pesos. Si Ana duplica la cantidad, su mamá también la duplica, entonces va aumentando, es una tabla de variación proporcional (Adriana 4 –el número indica el grado que atendía–).

En este problema no se logró un planteamiento "formal" para obtener la solución, pues en todas las soluciones se aplicaron estrategias intuitivas. Hubo quien utilizó la regla de tres, como Ignacio 6, quien consideró que la resolución de este problema podría ser más fácil *con regla de tres, 8 es a 12 como 6 es a 4,* pero sus compañeros no estuvieron de acuerdo y le interrogaron:

> ¿Ocho?, ¿de dónde sacaste el doce?, tú no tienes el doce, lo primero que sabes es la relación que hay entre dos y tres, no entre doce y ocho, entonces ¿cómo aplicas la regla de tres?
>
> Ignacio 6 incluye un planteamiento con datos no explícitos en el problema ("8 es a 12 como 6 es a 4") y sus compañeras le cuestionan por qué ocupa números que no están inicialmente en el problema. Ignacio 6, al no poder justificar su procedimiento comenta: "Bueno, fue la comprobación", y ya no intenta convencer a sus colegas de la pertinencia (o no) de su solución (Ignacio 6).

La discusión referente a la solución del problema 3 concluye sin resolver las dudas. Sin embargo, en torno al problema 4 se originó una extensa discusión, la cual ayudó a avanzar al grupo en el conocimiento. En seguida anotamos un fragmento del intercambio de ideas entre todos los miembros del grupo. En un primer momento, parecía existir un acuerdo en que los árboles crecían en la misma proporción (prevalecía la comparación aditiva), pero había desacuerdo en la respuesta a la segunda pregunta: *¿Qué árbol consideras que ha tenido un crecimiento más lento en estos cinco años?* Ignacio 6 estaba en otro punto del proceso de reflexión, su conocimiento parecía estar en un nivel más avanzado en comparación con el de sus colegas, y los presionaba a comprobar sus respuestas y motivar la reflexión. Insistía:

> Ignacio 6: Entonces, ¿qué árbol ha crecido más, ninguno?
> Isabel 4: Yo considero que la respuesta puede ser que han crecido lo mismo: 6 metros. La diferencia está en que no empezaron en la misma altura.
> Elena 3: [Es decir] Que uno creció más rápido que otro.
> Ignacio 6: ¿Y cuál es la respuesta?

Aquí los participantes en el diálogo muestran que han incorporado la idea de comparación relativa: "La diferencia está en que no empezaron en la misma altura". Pero Ignacio 6, insatisfecho por las respuestas de sus compañeras, explica la forma en que relacionó las cantidades, y menciona que los árboles no crecieron en la misma proporción. Uno (el de naranjas) creció más lento que el otro (el de mangos):

> Es que a mí [primero] se me ocurrió que la relación es que crecen igual [6 metros cada uno]. La misma proporción de 6, sí, pero luego me pregunté: ¿qué tanto es 14 de 8 y qué tanto es 16 de 10?, comparé las dos fracciones [8/14 y 10/16] y resulta que el que creció más lento fue el de naranjas.

La intervención de Ignacio 6 muestra: *a)* la interpretación inicial basada en una relación absoluta, aditiva ("Se me ocurrió que crecen igual, es decir, 6 metros cada uno"); *b)* la interpretación multiplicativa lograda en un segundo momento ("Pero luego me pregunté: ¿qué tanto es 14 de 8 y 16 de 10?"). Esto es, se observa el tránsito de la interpretación aditiva a la multiplicativa.

La explicación de Ignacio6 provocó nuevas reflexiones y alentó a otros colegas a exponer la forma en que obtuvieron la respuesta. En este momento, al igual que Ignacio 6, Melba 1 propuso dar solución al problema comparando las cantidades en forma relativa, pero empleó porcentajes en lugar de fracciones:

> Son árboles independientes. El de mangos tenía 8 metros y creció a 14, entonces 8 es el 100% del árbol, después aumentó a 14; 6 metros más. Esos 6 metros ¿qué porcentaje son de los 8? Entonces los 6 metros son a X [como 8 es a 100], me dio 75%. Los mangos crecieron 75% de lo que ya tenían. Con el de naranjas hice lo mismo. Los 10 metros son el 100% y los 6 metros que aumentó, ¿qué porcentaje es? Me da 60%. Entonces, las naranjas crecieron 60% y los mangos 75%.

Esta estrategia resultó más comprensible al grupo, y al concluir la discusión se había aclarado la diferencia entre la comparación absoluta (aditiva) y la comparación relativa (basada en el cociente) a partir del problema planteado. También aparecieron dos estrategias para resolver situaciones que implican este último tipo de comparación: fracciones y porcentajes.

Hemos observado que la resolución de los problemas mostró el nivel de conocimiento que tenían los participantes sobre la proporcionalidad al iniciar el taller: insuficiente para resolver correctamente los problemas planteados, pero los intentos de solución y la discusión contribuyeron a su comprensión y solución.

El problema 4 resultó más difícil de interpretar, pero la inclusión de dos preguntas, una referente a la comparación absoluta y otra a la relativa, favoreció la diferenciación de los dos tipos de comparación. Conviene señalar, sin embargo, que el intercambio y discusión sobre las soluciones obtenidas –y no la simple situación y su solución–, permitió identificar y diferenciar estos dos tipos de comparación.

No nos vamos a extender en exponer cada uno de los cambios en el conocimiento logrados en el proceso, pero es conveniente señalar que si bien al inicio fue casi nula la comprensión de las gráficas presentadas (figura 3), más adelante éstas fueron incluso sugeridas como herramienta para resolver problemas cuya interpretación resultaba difícil. En efecto, este avance se observa después, cuando en un pequeño grupo se reconoce la utilidad de las gráficas como herramienta que permite definir si una situación es proporcional o no.

Se discute en torno a una situación de juegos de globos donde interviene el azar:

> Gaby 6: Yo digo que sí hay proporción.
>
> Ignacio 6: Lo podemos comprobar con una gráfica.
>
> Lucía 5: Pero aquí es azar, no podemos saber cuántos globos vamos a romper…
>
> Ignacio 6: Vamos a comprobarlo con una gráfica […].

Hacia una mayor comprensión de la proporcionalidad: incorporación paulatina de nociones como relaciones escalares y funcionales

Como ya lo mencionamos, en un principio los docentes usaron con mayor facilidad las relaciones internas (o escalares), que las externas (o funcionales). Posteriormente, se introdujeron de manera explícita las nociones *relación escalar* y *relación funcional*, a través de una lectura sencilla que los vinculaba tanto a ejemplos familiares como a lo que los profesores habían hecho para encontrar la solución a los problemas.

Las ideas no se comprendían ni se formulaban con facilidad. Por ejemplo, después de varias preguntas y respuestas, Lucía 5 explica lo que entiende por ‘relación escalar’ de la siguiente manera:

> Cuando se da la relación entre cantidades de la misma magnitud, es decir, organizar kilos de un lado y precios del otro. La relación escalar es eso: poner naranjas con naranjas y pesos con pesos.

Lucía 5 enfatiza las dos magnitudes implicadas en la situación, pero no dice nada acerca del tipo de relaciones que se establecen; Ignacio 6, quien parece tener mayor conocimiento al respecto, expresa de manera más completa su comprensión de la relación funcional:

> Es la relación de magnitudes diferentes. Nosotros lo estábamos viendo en forma horizontal [se refiere a la disposición de los datos como aparecen comúnmente en una tabla de valores proporcionales]. Una magnitud son las naranjas y otra magnitud es el costo. A esa relación, a ese vínculo entre cantidades se le llamaría funcional. Vuelvo a llegar al valor unitario a través de ese razonamiento, en la comparación de esas cantidades.

La adquisición difícil de un nuevo lenguaje

La introducción de los términos "formales" a través de las lecturas fue provechosa. En diferentes momentos, los participantes procuraban comprender los conceptos –'nuevos' para ellos–; por ejemplo, Leticia AP (Artes Plásticas) busca confirmar la forma en que considera se puede reconocer la relación escalar y la funcional, y se dirige a la coordinadora: *¿Entonces, funcional es horizontal y escalar es vertical?* (se refiere a la disposición de los datos en las tablas de cantidades proporcionales).

La coordinadora enfatiza el sentido de la relación que se establece en y entre magnitudes distintas, sin tomar en cuenta la disposición de los datos en una tabla, cuestión que está en la base del razonamiento de Leticia AP.

En otro momento (3ª sesión) se emprendió un diálogo en torno a una tabla de cantidades proporcionales; este diálogo muestra los esfuerzos por comprender la proporcionalidad y utilizar el lenguaje recién aprendido –aunque no del todo comprendido– sobre este tipo de relaciones:

> Lucía 5: (Lee) las cantidades anotadas en la tabla no son proporcionales ¿por qué? (ella misma contesta), porque no suben en el mismo ritmo.
> Ignacio 6: ¿No qué?
> Lucía 5: No suben proporcionalmente, no van aumentando igual.
> Ignacio 6: Busca otra palabra.
> Gaby 6: Como dice la maestra, no hay una relación vertical proporcional (en realidad, la maestra no había dicho esto).
> Lucía 5: No se relacionan proporcionalmente.
> Ignacio 6: Busca otra palabra. No hay relación escalar.
> Lucía 5: OK, no hay relación escalar.
> Ignacio 6: Y la otra relación.
> Lucía 5: Pro… este, ¡funcional!
> Ignacio 6: ¡Ándele! (en tono aprobatorio).

Más adelante, después de una discusión sobre el valor que debía tener un tiro de canicas (de un juego de feria) para que pudiera considerarse una situación de proporcionalidad, el pequeño grupo comentó: "Entonces cámbiale: que la constante [la relación entre las dos cantidades correspondientes] sea la misma".

Se observa en estos diálogos, no obstante las limitaciones e incluso errores en el uso del lenguaje, la incorporación de nuevos elementos como constitutivos de la proporción: las relaciones escalares como aquellas que se establecen entre cantidades del mismo tipo y la constante de proporcionalidad, que se establece entre magnitudes diferentes. Si bien estas relaciones parece que no fueron del todo comprendidas y no están bien expresadas, es un buen logro que los profesores se hayan acercado a ellas. Por supuesto, el proceso debería continuar hasta que se eliminaran todas las confusiones, lo cual parece haberse logrado en las últimas sesiones del taller.

Al inicio del taller los profesores no emplearon lenguaje convencional para referirse a los conceptos vinculados a la proporcionalidad. Por ejemplo, utilizaban la relación escalar para resolver problemas, pero al hacer referencia a dicha relación se expresaban de la siguiente manera: "Saqué primero los resultados de esta columna". Al respecto, conviene comentar que los profesores no tenían por qué conocer ese lenguaje, ya que la SEP no lo incluye en los materiales que les proporciona, y tampoco se han impartido cursos al respecto. Sin embargo, como en el taller se consideró el uso del lenguaje, poco a poco fue teniendo mayor presencia en los comentarios: "utilicé la relación escalar porque es más fácil", "yo hice una regla de tres [...] también podría hacerse utilizando la relación escalar, es más práctico para los niños" (5ª sesión). Como se ve en estas participaciones, el lenguaje incorporado permitió aclarar las ideas e hizo más fluido el intercambio.

Otro aprendizaje relevante: el *conocimiento del contenido* escolar tiene repercusiones en la enseñanza

Al inicio del proceso, los docentes se consideraron a sí mismos conocedores de la proporcionalidad, y algunos otros señalaron que sus necesidades docentes respecto de la proporcionalidad, y de las matemáticas en general, eran de tipo pedagógico (cómo enseñarla). Durante el proceso formativo, su perspectiva cambió; mencionaron que, antes de la participación en el taller, no habían reconocido suficientemente la importancia de dominar el tema para poder impartirlo. Consideraban que las dificultades para su aprendizaje por parte de los niños radicaban, no en su propia actuación como docentes, sino en limitaciones inherentes al pensamiento de los alumnos ("para ellos, es difícil entenderla"). No habían considerado que al entender la proporcionalidad y manejarla con mayor facilidad, en tanto que *conocimiento matemático especializado*, podían apoyar mejor el aprendizaje de los alumnos. El siguiente comentario, emitido por la directora, y dirigido a la coordinadora del taller, sintetiza cómo evolucionó este punto de vista:

> Cuando me platicó [usted que el taller sería sobre proporcionalidad] yo dije 'pues qué tan importante puede ser' y descubrí que es básico, es un tema importante que está implícito desde el primer grado, se requiere que se vaya retomando para ir profundizando, porque está implícito en todos los ejes [del programa de matemáticas]. Se veía como algo[...] ¡yo lo percibía como algo muy superficial! cuando es algo muy importante.

En estos comentarios la directora reconoce el valor de entender el contenido, analiza el dominio que los profesores tienen de él y la posibilidad de apoyar mejor el aprendizaje de los alumnos. Otros participantes se adhirieron a esa postura, agregando además sus repercusiones en la planeación de la enseñanza del tema para el grado que se atiende y a lo largo de la educación primaria:

> Para los niños es difícil aprender la proporcionalidad, no es un concepto fácil, por eso requiere [que les planteemos] más actividades en todos los grados (Guille 5).
>
> Qué tanto les estamos dando realmente lo que necesitan [...] Si no tienen lo elemental, lo básico, lógicamente no van a darnos respuesta ahorita (Sara NEE, profesora que atiende alumnos con necesidades educativas especiales).
>
> Si en los primeros grados se utilizan mucho las tablas (de proporcionalidad), eso ayuda posteriormente a realizar otro tipo de ejercicios con los niños de otros ciclos (Ignacio 6).

Es posible decir que durante las sesiones los profesores aprendieron, recordaron o aclararon algunos conceptos asociados a la proporcionalidad y usaron un nuevo lenguaje para referirse a las implicaciones conceptuales y didácticas del tema. También reconocieron la importancia de trabajar el concepto en toda la educación primaria, pero con enfoques distintos, derivados de una planificación de la enseñanza. Una evidencia de esto es que al finalizar la tercera sesión del taller, la mitad de los docentes reconocieron como el aprendizaje más relevante *haberse percatado de la continuidad que mantiene el tema de proporcionalidad a lo largo de la escuela primaria*.

La participación de la directora del plantel y la pertinencia de nuestra hipótesis respecto de la importancia de trabajar en una comunidad escolar

Al inicio del trabajo, consideramos que llevar a cabo un proceso de formación con todos los profesores de un plantel sería más provechoso que si cada uno de ellos tomara cursos de manera independiente. Un elemento que parece ser indicador favorable de esta hipótesis, son las participaciones de la directora, quien con sus intervenciones, más como líder que como alguien que está aprendiendo, ayudó en el avance del proyecto formativo. A continuación incluimos tres de sus participaciones como evidencia de su papel en el proceso.

En la sesión inicial –recordará el lector–, la inquietud generada en el conjunto de los profesores, al considerar que no tenían elementos suficientes para resolver los problemas planteados, parecía generar más tensión de la conveniente y estancar el proceso. Sin embargo, un comentario de la directora del plantel permite que la tensión disminuya y que el proceso avance:

> Estamos sacando nuestro nerviosismo ante esto, pero es importante que los conceptos que vertamos sean los que tenemos. Maestros: ¡se vale no saber! [enfatiza fuertemente la frase]. No le tengamos miedo a no saber algunas cosas, por eso estamos aquí.

En el comentario siguiente, realizado en otra sesión del taller, la directora deja ver su preocupación por la dificultad que mostraron los profesores para comprender algunos conceptos vinculados a la proporcionalidad, y considera que el uso del lenguaje matemático ayudará a entenderlos. Su reflexión ante el grupo es la siguiente:

> Necesitamos primero desarrollar este lenguaje matemático. Una de nuestras limitaciones es la formación matemática que recibimos, hablo por mí, pues no nos apropiamos de un lenguaje matemático. Tal vez una de las

> limitantes para comprender es esa. Lo interesante sería apropiarnos ¡ya! de ese lenguaje matemático para llegar a una mayor comprensión (3ª sesión).

La participación de la directora también se orientó a animar a todos los profesores a reconocer su relación previa con la proporcionalidad, como un factor que permitirá una nueva relación con este contenido:

> Se tiene la capacidad, todos tenemos la capacidad, pero siempre faltó el dejarnos resolver y no encuadrarnos a que 'esto se soluciona así'. [Esto] nos limitó y ahora nos cuesta trabajo, pero ya descubrimos que hay muchos caminos para resolver un problema, pero nos cuesta trabajo procesarlo [por nuestras experiencias e ideas previas].

CONCLUSIONES

En concordancia con nuestros supuestos iniciales, observamos que los conocimientos con que los docentes iniciaron el proceso de formación eran escasos, desconocían los conceptos y el lenguaje que ha generado la didáctica de las matemáticas respecto de las proporciones. Este conocimiento era insuficiente para poner en práctica de manera adecuada y con flexibilidad el complejo enfoque constructivo que desde 1993 propuso la Secretaría de Educación Pública para enseñar la proporcionalidad en la escuela primaria mexicana.

La resolución de problemas, la discusión de resultados y las estrategias de solución utilizadas, también conforme a nuestras previsiones, motivaron a los profesores a participar activamente en el taller, y favorecieron la ampliación del conocimiento matemático sobre la proporcionalidad. El proceso significó para los maestros un arduo trabajo cognitivo a partir de los problemas planteados y un intenso intercambio de opiniones e ideas. En el transcurso del proceso, se incorporaron, modificaron o explicitaron algunas nociones, por ejemplo: proporcionalidad, comparación aditiva y multiplicativa, relación escalar y relación funcional, así como el lenguaje vinculado a estos conceptos. El lenguaje mostró ser un instrumento importante para la interpretación de las situaciones de proporcionalidad y un facilitador del diálogo, pero también dejó ver que los profesores tienen dificultades para comprender este tipo de propuestas de enseñanza, que de suyo son bastante complejas.

En general, los docentes participantes coincidieron en señalar que durante el taller lograron ampliar sus conocimientos sobre el tema. Además lograron también otros conocimientos que nos parecen fundamentales para los profesores, a saber: *a)* que los conceptos matemáticos (en este caso la proporcionalidad) son complejos y que es necesario trabajarlos a lo largo de mucho tiempo para lograr su aprendizaje en los estudiantes; *b)* que un mayor conocimiento del tema permite enseñarlo mejor: *Si lo entendemos, ponemos actividades sencillas y ágiles que faciliten la comprensión (del niño). Lo comprendo mejor y esto me permite trabajarlo de otro modo, [pero] necesito continuar con el aprendizaje.*

No obstante los avances obtenidos, aún al final del taller se resolvían con más facilidad los problemas cuya solución era posible utilizando relaciones escalares, lo que muestra que la proporcionalidad y las relaciones que implica, no son de fácil comprensión y manejo ni para los docentes.

Al inicio de este trabajo nos planteamos como hipótesis la idea de que un proceso de formación en el que asistieran todos los profesores de una escuela sería más provechoso, que aquel donde los docentes participaran de manera individual. Esta hipótesis tiene una validez que debe seguirse constatando; sin embargo, hay indicadores que van en tal sentido: por ejemplo, la conclusión obtenida por los docentes respecto a la relevancia de trabajar en conjunto la planeación del tema a lo largo de la primaria; o la participación de quien dirige el plantel escolar, no sólo con el fin de facilitar y motivar a los participantes para que lo aprendido se traduzca en acciones, sino incluso para evitar estancamientos y con ello hacer avanzar el proceso de formación en momentos críticos. En este caso, nos parecen relevantes las participaciones de la directora en varios sentidos: el llamado a la aceptación del "no saber", o a reconocer las limitaciones de la formación recibida como docentes; el énfasis en la importancia del tema abordado y en la importancia de la acción colectiva basada en el acuerdo y la planeación, entre otros.

Por supuesto, el papel del director dependerá de las características y virtudes de éste, no todos los directores tendrán la autoridad ni la capacidad de conminar a sus colegas a hacer un buen trabajo académico, por lo que no es posible hacer afirmaciones generales sobre la función que un director represente en un proceso de formación.

Un beneficio más general que parece reflejar el valor del trabajo al interior de la comunidad docente constituida en una escuela, es que el conocimiento sobre el tema se ha socializado, que la directora ha reconocido la relevancia de que los profesores estén bien preparados en lo disciplinar, que se han identificado las repercusiones del trabajo propio sobre el trabajo de los otros y la importancia de funcionar como colectivo.

Sería deseable que, como resultado del nuevo aprendizaje adquirido en la comunidad, se promovieran y realizaran acciones que prolonguen estos aprendizajes e impacten en los aprendizajes de los alumnos. Saber si esto ocurrió o no, es cuestión de una nueva investigación, aunque tenemos indicios de que es más fácil modificar el discurso que la acción, sea ésta individual o colectiva (ver Gutiérrez, en proceso).

Referencias

Alatorre, S. (2004). *¿A, B o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional*. Tesis doctoral. México: Cinvestav.

Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.

Block, D., Dávila, M., Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. En *Revista Educación Matemática*, *7*(3). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Block, D. (2006, junio). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19,* 675-680. Clame.

Block. D., Mendoza, T., Ramírez, M. (2011). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: Ediciones SM.

Díaz, M. (2006). *La formación del docente; una tarea inconclusa*. Tesis de maestría. UPN, Unidad 142, México.

Estrella, L. R. (2003). *El impacto de los cursos de capacitación del PAREB en el desempeño de los docentes de Educación Primaria*. Tesis de maestría. UPN, Unidad 31, México.

Fernández, C. Llinares, S. y Valls (2011, ene/jun). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae*, *13*(1), 9-29.

Giménez, J., Llinares, S., Sánchez, V. (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada, España: Comares.

Gutiérrez, C. (2008). *Proceso de reflexión en un taller de matemáticas para docentes en servicio*. Tesis de maestría. UPN, México.

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D. & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of teacher education*, *58*(1), 47-61.

Hill, H.C., D. Ball y S.G. Schilling (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Llinares, S. (2005). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En Ma. del Carmen Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid, España: Pearson-Prentice, 187-220.

Parada, S., Figueras, O. y Pluvinage, F. (2009). Hacia un modelo de reflexión de la práctica profesional del profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* Santander: SEIEM, 355-366.

Rey, C. (2011). *Construcción de conocimiento acerca de la intervención curricular*. Tesis de doctorado. Universidad de Alicante, España.

Rivas, M., Godino, J. y Castro, W. (2012, abril). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Boletim de Educaçao Matemática*, *26*(42B), 559-588.

SEP (2010). *Libro de Matemáticas del alumno.* Primero a sexto grados. México: SEP.

SEP (2011). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Primaria*. México: SEP.

SEP (2011a). *Competencias para el México que queremos. Hacia PISA 2012*. México: SEP.

SEP-SEBYN-CGAYCMS (2006). Reglas de operación del Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica en Servicio. México: SEP.

Trigueros, M. & Lozano, M. (2012). Teachers teaching mathematics with Enciclomedia: a study of documentational genesis (cap. 13). En G. Gueudet, B. Pepin, L. Trouche (Eds.), *Mathematics teacher education,* vol. 7. Nueva York: Springer Science.

Valls, J., Llinares, S. y Callejo, M. L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas (pp. 27-47). En M. C. Penalva, I. Escudero, D. Barba. *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas*. España: Grupo Proyecto Sur.

Vergnaud, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

FUENTES ELECTRÓNICAS

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Bases de datos Excale. Excale 06, Ciclo 2008-2009. Disponible en www.inee.gob. mx. Consultado el 30 de mayo de 2014.

http://formacioncontinua.sep.gob.mx/

http://www.sep.gob.mx

http://basica.sep.gob.mx

http://www.enlace.sep.gob.mx/que_es_enlace/

PARTE TRES / PART THREE

QUÉ, CÓMO Y POR QUÉ: ¿POR QUÉ EL CONOCIMIENTO Y APRENDIZAJE DE LOS PROFESORES ES UNA CUESTIÓN CRÍTICA?

WHAT, HOW, WHY: WHY TEACHERS' KNOWLEDGE AND THEIR LEARNING ARE SUCH CRITICAL ISSUES?

CAPÍTULO VI / CHAPTER VI

TEACHERS'-MATHEMATICS-KNOWLEDGE-BUILDING COMMUNITIES

Brent Davis

Resumen

El presente capítulo está escrito desde la convicción de que debe haber una fuerte relación entre el conocimiento disciplinario de los profesores y la eficacia pedagógica. Describe el surgimiento de comunidades de construcción de conocimiento entre docentes en ejercicio en la medida en que analizan y re-sintetizan contenidos de matemáticas para la enseñanza. Para enmarcar esta discusión, me ubico en un lugar diferente de muchos comentarios actuales sobre el conocimiento disciplinar de profesores de matemáticas. En lugar de comenzar con un enfoque centrado en las matemáticas, adopto la perspectiva de hallazgos recientes sobre el aprendizaje.

Abstract

This chapter is written from the conviction that there must be a strong relationship between teachers' disciplinary knowledge and pedagogical effectiveness. I describe the emergence of knowledge-

building communities among practicing teachers as they analyze and re-synthesize –that is, *substruct*– mathematics content for teaching. To frame this discussion, I start in a different place from many current commentaries on teachers' disciplinary knowledge of mathematics. Rather than opening with a focus on *mathematics*, I look at a few recent insights into *learning*.

"Mathematics knowledge for teaching" is by far the most prominent topic of investigation among mathematics education researchers at the moment, and that shouldn't be surprising. There is an intuitive appeal to the suggestion that there must be a strong relationship between teachers' mastery of mathematics and their effectiveness in the classroom.

Certainly this chapter is written from the conviction that there must be a strong relationship between teachers' disciplinary knowledge and pedagogical effectiveness. Yet, as I elaborate in the second section of this chapter, when one delves into the research, the picture is not quite as clear as one might expect.

To cut to the core of my argument, there appear to be two main schools of thought on the matter of mathematics knowledge for teaching. One holds that such knowledge is mostly formal and explicit, and is therefore specifiable, cataloguable, unpackable, teachable, and testable. The other is that such knowledge is principally tacit, and so the work of defining, developing, and assessing mathematics knowledge for teaching demands much more subtle, participatory, and time-extensive strategies.

I focus on the latter in this chapter.

How we learn – logical vs. analogical

There is a deep-seated assumption in modern, western thinking that humans are logical creatures.

That's a fair belief. No other species has demonstrated anything close to the rational, deductive capacities of humans. However, the fact that our species has developed this capacity shouldn't be taken as evidence that we are logical. On the contrary, it appears that relatively little of our thought falls into that category, and that which does, we tend to find exhausting and difficult. Whereas machines can be made to do it with relative ease, we humans can't keep it up for long and our efforts tend to be highly error prone. In contrast, we're stunningly adept at associative thinking –at noticing similarities, construing relationships, making analogies, using metaphors, and so on.

Unfortunately, for the most part, school mathematics emerged in an era where the prevailing belief was in the essential logical nature of human thought. That is perhaps the main reason that mathematics curricula –and, for that matter, the curricula of most subject areas in the modern school– are usually organized around the model of the rational-deductive proof. As exemplified in Euclid's geometry, the essential idea is that one starts with the most rudimentary parts of a system and builds in a logical, sequential manner towards more sophisticated, defensible truths.

In terms of underlying metaphor, the form that is most often invoked in discussions of curriculum and learning is not the deductive proof but the image of building –which is part of the reason that there is such an easy fluency in educational discussions with such terms as basics, foundations, building blocks, construction, scaffolding, and upward progress. A secondary image for learning in popular discussions is that of a route between two points, by which learning is construed in terms of forward, incremental movement along a pre-specified path. (The word *curriculum* is derived from a Greek term meaning "path to be followed.") Awareness of this metaphor helps to make sense of contemporary obsessions with forward movement, measurable progress, objective/goal setting, and so on.

These metaphors are so commonly invoked that it can be difficult to recognize that they are figurative and not literal descriptions of the structures of knowledge and the dynamics of learning.

However, now that systems of knowledge can be analysed for their networked structures, and brains can be observed in real time, it's clear that there are no pristine edifices under construction and no straightforward paths to be pursued. Rather, knowledge production and learning seem to be more about establishing ever-more complex webs of connection –and, for the most part, these connections aren't logical at all.

Rather, they tend to be circumstantial, accidental, and at times almost random. Consider one brief example: What's an even number?

Just about anyone who has taken any math in school can offer a quick answer to this question. However, while no doubt compatible, it's likely that a typical group of people will offer many different answers. What's more is that the more sophisticated one's response might be, the more likely that response will obscure the incredible range of experiences and associations that made it meaningful in the first place.

To elaborate, I posed the "What's an even number?" question to a Grade 3 class (8- and 9-year olds) a few years ago. Their responses included mentions that an even number:

- makes pairs (i.e., can be divided evenly into sets of 2),
- splits into 2 same-size groups,
- makes two even towers,
- will be landed on if you do hops of 2 (starting at 0) on a number line,
- can be landed on in 2 (whole-number) hops on a number line,
- folds in 2,
- is on the count-by-2s list,
- ends in 2, 4, 6, 8, or 0,
- can be written as a sum of 2s,
- can be subtracted to 0 by taking away 2 at a time,
- is a multiple of 2,
- is evenly divisible by 2.

There may have been others, but these are the ones that my assistant and I were able to hear. And, to be honest, I suspect there were several we weren't able to hear.

We're not alone in this difficulty. It turns out this sort of conceptual diversity can be very hard for adults to notice. For instance, I've posed the same question to classes of undergraduate and graduate students and afforded them comparable thinking time as the Grade 3s, and so far none has generated a list of responses that has anywhere near the diversity of the list above. What tends to happen is that adults gravitate to more generalized descriptions, such as "any whole number that can be divided evenly by 2" or "All b, where $a = b/2$; a and b are integers." Then they stop.

Of course, such abstracted formulations are precisely where mathematics gets its power, as they encompass many specific instantiations into a generalized realization. At the same time, however, they can conceal the complexity of such "simple" concepts as "even." Indeed, when I follow up with adult learners by showing them the Grade 3 students' list of meanings, the most common response is something toward, "Those are all the same thing."

True. Sort of. Therein lies the critical issue as it relates to teachers' disciplinary knowledge of mathematics. In fact, the elements on the list are not the same thing. In some ways, there is wild variation among them. The actions that are invoked include pairing, splitting, folding, hopping, skipping, skip counting, adding, subtracting, multiplying, and dividing. The fact that the adult knower doesn't immediately recognize the stunning variety that is present is evidence of an important insight for teaching: an expert's mathematical understandings might blind them to variations among specific instantiations. That is, they might not be able to see the differences among elements that a novice can't see as the same.

Phrased in a very different way, because the expert has had opportunity to distil and integrate a broad array of experiences into a tight abstract formulation, her or his capacity to consciously notice how that formulation is manifest in specific situations has been compromised. With regard to *doing* mathematics, that's probably a good thing, as it frees up working memory to deal with ever-increasing abstractions. However, with regard to *teaching* mathematics, it's probably a bad thing. A teacher who can no longer recognize the incredible diversity that lurks inside every mathematical concept can rob young learners of the important processes of grappling with variation to find consistency. Lacking that opportunity to make sense of things, the learner's recourse may be memorization and rote application.

Or phrased in a still-different way, *doing* mathematics effectively relies on applying *definitions*; *learning* mathematics effectively is much more about integrating *meanings*. That is, learning mathematics is less about leaping to the finely tuned, logical statement; it's more about discerning similarities and constructing associations among the many encounters one might have with a concept.

The good news is that this is not a particular random process. Many of the associations that learners are expected to make are fairly consistent across particular cultural or social groupings, owing to entrenched habits of interpretation that are embedded in the language or pervasive in the physical space. Indeed, the list generated by the Grade 3 class illustrates this point. It would be unsurprising to see groups of similarly-aged children from across the English-speaking world identify the same sorts of meanings. At the other extreme, as any experienced teacher will attest, learners often make entirely idiosyncratic associations among concepts and happenings.

The important point at this juncture is not the truism that humans are predisposed to making connections among their experiences; nor is it that this predisposition is actually the principal mode of human learning. Rather, the critical point for now is that the main mechanism in abstract learning is figurative association: metaphor, metonymy, image and similar strategies. That is, humans are mainly analogical, not logical (Lakoff & Johnson, 1999). Briefly, then, humans are capable of logic, but that capacity seems to ride atop the irrepressible tendency to make connections. Moreover, when the language of rationality and deductive argument is carefully deconstructed, "logic" itself proves to be highly analogical. As Lakoff and Johnson illustrate, conceptions of what it means to be logical, deductive, and rational are thoroughly anchored to figurative notions of containment and linear motion.

To be sure, logical thought is much more than a simple figurative device. It is a powerful conceptual extension of a biological predisposition. It transcends inborn capacities, it doesn't piggy back on them. Logical thought, then, should not be construed as some sort of secondary or subsidiary function. It is an extraordinary achievement and a goal of mathematics education.

However, it's not the starting place. When it comes to learning and teaching mathematics, the centuries-old habit of organizing schooling experience around the assumption of a core logical nature is highly troublesome. Somehow, events to support mathematics learning must be structured in ways that recognize humans' penchant for analogical thought at the same time as they capitalize on humans' potential for logical thought. As mentioned at the start of this chapter, this insight is starting to be taken up with greater vigour among researchers who investigate teachers' disciplinary knowledge of mathematics. However, as I illustrate in the next section, it has been a slow realization, and one that is not yet mainstream.

A BRIEF HISTORY OF RESEARCH INTO TEACHERS' MATHEMATICS KNOWLEDGE

In particular, since the 1970s, investigations of the relationship between teachers' formal knowledge of mathematics and their students' learning have repeatedly reaffirmed an early finding by Begle (1979): there is little correlation between the mathematics courses that teachers take and the performance of their students on standardized tests. This result is, of course, troubling, given that most teacher education programs require candidates to complete several courses in areas of disciplinary specialization.

Why is there a lack of correlation? Widely endorsed answers to this question began to emerge in the 1990s as researchers noted that stock courses in mathematics are focused on completed results that often hide the messiness and complications that led to their production. In contrast, teaching in primary school entails struggling with that messiness and working through the complications as students produce novel mathematical insights. Since teachers must regularly employ associative reasoning as they grapple with the images, analogies, logical connections, and other associations that tend to be buried inside finalized formulations, their knowledge is necessarily different from research mathematicians' knowledge. As Ball and Bass (2003) characterized the difference, whereas it is the research mathematician's task to pack insights into tight formulations (theorems, formulas, etc.), it is the teacher's task to *unpack*. Applying Shulman's (1986) notion of "pedagogical content knowledge" to mathematics, the suggestion is that a specific type of professional knowledge is involved here, as Baumert et al. (2010) summed up in a recent review of the research in the area:

> Findings show that [teachers' content knowledge of mathematics] remains inert in the classroom unless accompanied by a rich repertoire of mathematical knowledge and skills relating directly to the curriculum, instruction, and student learning. (p. 139, emphasis added)

Despite widespread agreement on this point, there is a decided lack of consensus around the nature of teachers' "inert" mathematical content knowledge and how it might be activated. A large number of formal investigations have focused on explicit manifestations of disciplinary knowledge –that is, the sorts of insights that can be assessed directly through observation, interviews, or written tests. Such explicit knowledge is typically deemed to be teachable.

Other researchers have suggested that the most important knowledge for teaching tends to be enacted and tacit, and so it is neither easily identified nor readily measured. Some of these investigators have emphasized the networks of association that underlie the conceptual fluency of expert teachers. As has been established in other domains (see Ericsson et al., 2006), expert performance is enabled by well-established and automatized (i.e., not necessarily accessible to consciousness) webs of association, from which the expert effortlessly "selects" an interpretation, scenario, or cluster of actions that is likely to best fit unfamiliar situations. Experts are typically unable to explain or justify their choices when asked about them; they simply recognize their interpretations or actions as appropriate. I believe that teachers' content knowledge of mathematics manifests largely in this way –and, if this belief is justified, there are significant implications for how mathematical knowledge for teaching is studied, assessed, and developed.

I use Ma's (1999) notion of "profound understanding of fundamental mathematics" as the backdrop of this discussion. However, while I resonate with her interpretation of the word profound, I am less comfortable with the adjective fundamental. Specifically, I propose that characterizing teachers' disciplinary expertise as "foundational, primary, and elementary" –terms which suggest a closed set of insights and understandings that might be catalogued and assessed– may be antithetical to the project of researching the complexity of teachers' knowledge. As an alternative, I develop the notion of "profound understanding of *emergent* mathematics" (Davis, 2011; Davis & Renert, 2014). I argue that the knowledge needed by teachers is not simply a clear-cut and well-connected set of basics, but a sophisticated and largely enactive mix of various associations/instantiations of mathematical concepts and an awareness of the complex processes through which mathematics is produced. I use the term *emergent* to flag the adaptive, evolving, coherent-but-never-fixed character of teachers' disciplinary knowledge.

The distinction between fundamental and emergent is not a subtle one. The former is lodged in a web of construction metaphors, and bespeaks fixedness, stability, and constancy. I argue that the image is not only inappropriate; it is counterproductive. Teachers' disciplinary knowledge of mathematics is vast, intricate, and evolving. Rather than thinking in terms of a discrete body of foundational knowledge held by individuals, it may be more productive to view it as a flexible, vibrant category of living knowledge that is distributed across a body of professionals.

Instead, then, of casting teachers' mathematics as a stable collection of facts that must be mastered, I prefer to think of it as a learnable disposition. To develop what I mean by this, I proceed with a discussion of "concept study" which refers to a collection of strategies developed by teachers of the past 15 years to interrogate and extend their mathematical understandings.

CONCEPT STUDY

A concept study is a participatory, collaborative structure for teachers to engage with one another in the examination and elaboration of mathematical understandings. The phrase concept study combines elements of two prominent notions in contemporary mathematics education research: *concept* analysis and lesson *study*.

Concept analysis, which was well represented in mathematics education research from the 1960s to the 1980s, focuses on explicating logical structures and figurative associations that inhere in mathematical concepts. As Usiskin and colleagues (2003) described it, concept analysis

> …involves tracing the origins and applications of a concept, looking at the different ways in which it appears both within and outside mathematics, and examining the various representations and definitions used to describe it and their consequences. (p. 1)

Usiskin et al. extended their description to include ways of representing ideas to learners, alternative definitions and their implications, histories and evolutions of concepts, applications, and learners' interpretations of what they are learning. Concept study has very much the same sorts of foci. However, unlike concept analysis (which has typically been undertaken by researchers and subsequently published as textbooks and resource materials for teachers), concept study involves classroom practitioners in the work.

That is where and how the focus on concept analysis is blended with the collaborative structures of lesson study:

> Working in a small group, teachers collaborate with one another, meeting to discuss learning goals, to plan an actual classroom lesson (called a 'research lesson'), to observe how it works in practice, and then to revise and report on the results so that other teachers can benefit from it. (Wikipedia, "Lesson Study," retrieved 2013 January 14.)

Unlike lesson studies, concept studies are not concerned with crafting classroom activities or learning tasks. However, like lesson studies, concept studies are oriented toward new pedagogical possibilities through participatory, collective, and ongoing engagements.

Further, and breaking with the popular focus on "unpacking" in contemporary research into teachers' disciplinary knowledge of mathematics, concept studies move well beyond taking concepts apart. While some of the activities that cross-grade groups of teachers undertake do resemble unpacking (e.g., identifying metaphors, analogies, and images that teachers use to render concepts meaningful), the products of such activities serve as gateways to more constructive engagements which can quickly lead to reworkings of the concepts at hand. I refer to this process as *substructing*.

The word *substructing* is derived from the Latin *sub-*, "under, from below" and *struere*, "pile, assembled" (which is the root of *strew* and *construe*, in addition to *structure* and *construct*). To substruct is to build beneath something. In industry, substructing refers to reconstructing a building without demolishing it and, ideally, without interrupting its use. Likewise, in concept studies, teachers rework mathematical concepts, sometimes radically, while using them almost without interruption in their teaching.

Unlike "unpacking," the term "substructing" is both reductive and productive. It is reductive in that it starts by re-collecting and re-membering experiential, linguistic, and other elements that infuse the meanings of concepts. It is productive as it compels new integrative structures and novel interpretations, which in turn become the raw materials for further substructing.

Through many, many concept studies that have involved a total of more than 200 practicing teachers, a set of strategies has emerged to enable concept study. I organize them into five emphases –meanings, landscapes, entailments, blends, and pedagogical problem solving. Importantly, these emphases are not steps and they are not intended as prescriptions. They are simply tools invented by teachers working together to substruct their mathematics.

Emphasis 1: Meanings

The term *meanings* is used to collect all manner of associations that a learner might draw on and connect in efforts to make sense of a mathematical construct. During the meanings emphasis in concept study, participants typically generate lists of instantiations for a concept that look something like the list of meanings of "even" generated by the Grade 3 class. Among many possible elements, meanings might draw on:

- Actions (e.g., a group has an even number of members if they can be paired off)
- Images (e.g., the number of items in a linear arrangement of discrete objects is even if a line can be drawn in the middle that results in the same number on both sides)

- Formal definitions (e.g., an even number is a whole number that, when divided by 2, has no remainder)

This list can be extended, depending on the type of concept under examination. (For example, other categories of meaning include gestures, metaphors, and algorithms.) To be clear, the assertion and assumption here is not that any particular meaning is right, wrong, superior, inferior, adequate, or insufficient. It is that personal understanding of a mathematical concept is an emergent form, arising in the weaving of such experiential and conceptual elements.

The process of collectively identifying meanings is neither linear nor obvious. Each knower holds and utilizes a personal set of meanings. Some of these are common to all participants, while others are idiosyncratic or shared by only a few. Moreover, meanings are not fixed; they evolve through the process of learning. Not only do they become more numerous, some earlier ones are discarded or expanded when new interpretations arise. Well-rehearsed meanings (e.g., "a function is a relationship") can be so well practiced that they may eclipse other interpretive possibilities.

To circumvent the tendency to go directly to well-rehearsed meanings, concept study sessions are typically framed as invitations to explore how a concept such as even/odd is introduced, taken up, applied, and/or elaborated at different grade levels. This strategy also helps to sidestep the temptation to leap straight for the practiced definition.

Emphasis 2: Landscapes

There are dramatic differences of conceptual worth among varied meanings. Some can reach across most contexts in which a learner might encounter a concept; others are situation-specific or even perhaps learner-specific. This realization compelled a "landscapes" strategy, to organize and contrast assembled lists of meanings.

Briefly, a landscape is a macro-level view, whereas a meaning is a micro-level view, of a concept. For example, if I were to undertake to craft a landscape of the concept of "even," I would probably plot out a conceptual flow from interpretations that are mainly enactive (i.e., rooted in pairing, splitting, hopping, etc.), to interpretations that are more iconic (e.g., two even towers), to interpretations that are mainly symbolic (e.g., "a whole number that divides evenly by two"), to a formal and mathematically accepted definition (i.e., "All b, where $a = b/2$; a and b are integers").

Most often, landscapes are created in grid-like formats by identifying two dimensions. Different criteria can be used to organize information, and "grade level" has been by far the most common dimension among teacher groups and across concepts. Others might include type of meaning (i.e., formal definition, metaphor, etc.), branches of mathematics linked to the meaning (e.g., arithmetic, algebra, geometry), processes versus objects, and so on.

With such ranges of possibility, landscapes tend to be very detailed and complex (see Davis & Renert, 2014, for other examples). The key point is that the purpose of a landscape is to afford senses of connection and trajectory –not in the least so that all participants, across grade levels, can see clearly how they contribute to the emergence of a concept.

Emphasis 3: Entailments

As already mentioned, every meaning of a concept carries a set of implications. The intention of this emphasis is to examine the entailments of different realizations to related concepts (e.g., How is the concept of "even" first introduced? Which operations are associated with the concept of "even"? Where does the concept appear in more advanced topics? etc.). In the process of exploring entailments, participants are forced to consider the concept afresh and not only in well-rehearsed, practiced ways.

The principal device used within this emphasis is a grid that was invented by a group of teachers who were struggling to understand why 1 is a prime number (Davis, 2008). As illustrated in the chart below, an "entailments chart" comprises a list of realizations in the first column, with as many additional columns as desired to record the usually uninterrogated implications of those meanings. I've restricted myself to just a few meanings of even (column 1) and two associated concerns (row 1) – he meaning of "odd", and what the particular meaning might have to say about the evenness of 0– but these charts tend to be much, much larger as other meanings and topics are considered. (See Davis & Renert, 2014, for several examples.)

If an "even number" is …	… then an "odd number" is …	Is 0 even?
A group that can be put into pairs with none left over	A group that has one left over when divided into pairs	Question doesn't make sense. How can you pair things up when you don't have any?
A number that you land on when you do hops of 2 on a number line, starting at 0.	A number that you hop over when you do hops of 2 on a number line.	No. By this meaning, the first even number must be 2.
A number that divides evenly by 2.	A number that leaves a remainder of 1 when dividing by 2.	Depends on whether "0 ÷ 2" is a sensible operation for you (and it isn't for many Grade 3s)
A whole number that ends in 2, 4, 6, 8, or 0.	A whole number that ends in 1, 3, 5, 7, or 9.	Yes.

Importantly, the purpose of these charts is not to explore the mathematical voracity of each instantiation. It is to look for places and reasons where common sense might trip one up. For instance, the activity of starting at zero and hopping by 2s along a number line to identify the evens is extremely common. Yet, as a teacher I've witnessed again and again how this instantiation can prompt learners to think that 0 is not an even number. The teacher who elects to use it must thus be prepared with other instantiations that can be used to support or challenge the conclusions that might be drawn. Such is the messiness of teaching.

Across concept studies, a major consequence of examining entailments has been surprise and confusion over the inconsistencies and occasional contradictions that arise among different meanings. The final column of the chart above represents an explicit attempt to capture some of these tensions and disconnects. And it served as the focus of a protracted conversation on whether a few meanings in particular should be introduced at all.

Emphasis 4: Blends

The three emphases described so far are focused mainly on making fine-grained distinctions among realizations and their entailments. Not surprisingly, many teachers voice some frustrations as shared work unfolds. Concepts such as "even," after all, are mathematically coherent, not assemblages of images and implications.

The blends emphasis is about seeking out (or crafting) meta-level coherences by exploring the deep connections among identified meanings and/or assembling those meanings into a more encompassing interpretation –which, of course, might introduce emergent meanings in the never-ending cycle of sense making.

This emphasis draws on research into conceptual blends (e.g., Fauconnier & Turner, 1998) which analyzes how metarepresentations arise when learners blend meanings into more encompassing, further reaching constructs. Subprocesses of blending include inventing and designing new representations, comparing and critiquing them, applying and explaining them, and learning new representations. In the first concept studies in which I was involved, blends tended to arise spontaneously (Davis, 2008; Davis & Simmt, 2006). Those experiences prompted the desire to be more systematic, in the hope that teachers would leave concept studies with powerful, coherent understandings of the concepts they were substructing.

There's really no universal strategy for undertaking a blend. However, vital elements include categorization and distillation of meaning (i.e., looking for the BIG ideas –such as the three principal interpretations of function identified by the teachers). Collective process is also critical. Plain and simply, teachers need to be prepared to disagree and to argue their points and to work through tensions in the interests of their students.

Regarding the example of "even" that I've been using so far in this chapter, I have never worked with a group of teachers to examine possibilities for blends that might be appropriate at different grades. I did, however, take up the question with the Grade 3s, and the emergent consensus was that a "matching towers" instantiation seemed to embody all of the other of their interpretations in one way or another. That is, learners could find connections between matching towers and notions of pairing (i.e., a one-to-one matching for each layer of the tower), splitting in two (i.e., the two towers), folding in two, and so on.

In concept studies with practicing teachers, of course, the blends tend to be much more sophisticated. (See Davis & Renert, 2014, for several examples.)

Emphasis 5: Pedagogical Problem Solving

The emphasis of pedagogical problem solving returns teachers to the original emphasis of teaching. It revolves around the questions and quandaries that both capture students' imaginations and stop them in their tracks. Familiar examples include:

- Is ∞ a number?
- What does it mean to divide by zero?
- What's the difference between *undefined*, *indeterminate*, and *infinite*?

Indeed, the question, "Is 0 even?" falls into this category. To the experienced mathematics knower, these questions might seem trivial, with established and unambiguous responses. Such is not usually the case for novices, as most experienced teachers will attest. As part of a concept study, the intention is to provide a space for participants to bring their diverse areas of conceptual expertise to bear on the sorts of questions that can both captivate and stall groups of learners. They are also intended as opportunities to explore the deep and extensive "root systems" of mathematical concepts.

To explain, the three questions noted above turn out to be intimately linked. As detailed elsewhere (Davis & Renert, 2014), fulsome responses to any of these questions will inevitably compel examination of the others. Moreover, matters of number, operation, and function must be engaged in order to appreciate the responses.

WHY SHOULD WE CARE?

In addition to its vastness, its complexity and its distributed character, a quality of teachers' disciplinary knowledge of mathematics that is made particularly manifest through concept study is its volatility. Plain and simply, on both individual and collective levels, it is a moving form.

It is for this reason that I prefer to think of this category of expertise in terms of learnable disposition in addition to a domain of knowledge. I thus close with a few comments on how I understand the relationship between *mathematics* and *mathematics for teaching*. The simultaneous foci of concept study are (1) the "explicitification" of current mathematics knowledge, and (2) the creation of new possibilities for mathematics teaching that are rooted in more nuanced understandings and elaborations of extant mathematics. The goal is not to create new formal mathematics, a task that would require very different validation criteria. The essential questions for us do not revolve around the ontological status of mathematical concepts or around teachers' production of new mathematics.

As a research community, mathematics educators are still far from making definitive claims about the relationships between teachers' profound understandings of mathematics and their students' mathematical understandings. My suspicion is that efforts to address this vexing quandary will require more fine-grained analyses than large-scale assessments, in large part because many of the most important aspects of teachers' knowledge are simply unavailable for explicit and immediate assessment. They are tacit and can only emerge through participation in collective explorations, such as concept studies.

References

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., Tsai, Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47, 133-180.

Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: findings from a survey of the empirical literature.* Washington, DC: Mathematical Association of American and National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 86-91.

Davis, B. (2011). Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge. *Science*, *332*, 1506-1507.

Davis, B., & Renert, M. (2014). *The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics*. New York: Routledge.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Ericsson, K. A., Charness, N., Feltovich, P., & Hoffman, R.R., (2006). *Cambridge handbook on expertise and expert performance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Fauconnier, G., & Turner, M. (1998). Conceptual integration networks. *Cognitive Science, 22*(2), 133-187.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought*. New York: Basic Books.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Usiskin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E.A., & Stanley, D. (2003). *Mathematics for high school teachers: an advanced perspective*. Upper Saddle River, NJ: Pearson

CAPÍTULO VII / CHAPTER VII

SHIFTING MATHEMATICAL COMPETENCIES TO DEVELOP SPATIAL REASONING

Krista Francis, Steven Khan y Brent Davis

RESUMEN

La participación en sociedades de conocimiento y disciplinas de CTIM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) requiere fuertes habilidades de razonamiento espacial. Cambiar el enfoque de la enseñanza del desarrollo de competencias matemáticas al desarrollo del razonamiento espacial es crucial para que los estudiantes comprendan, interpreten y creen representaciones de información compleja. Sin embargo, con frecuencia el razonamiento espacial no se enseña explícitamente en las clases de matemáticas y no se incluye en los programas de estudios estatales. Si el razonamiento espacial fuera parte de un nuevo programa de estudios de matemáticas, ¿qué debería incluirse? La falta de la enseñanza explícita y de programas estandarizados sobre razonamiento espacial nos estimuló para la concepción de un programa de estudios. En este capítulo, se expone la complejidad de los resultados de la im-

plementación de este programa a propósito de una actividad de construcción de un robot por una niña de 9 años.

Abstract

Participation in *learning societies* and STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) disciplines requires strong spatial reasoning skills. Shifting teachers' focus from mathematical competencies to developing spatial reasoning is crucial for students to understand, interpret and create representations of complex information. Yet, spatial reasoning is frequently not explicitly taught in mathematics classrooms, nor is it included in Canadian provincial standard curricula. If spatial reasoning was part of a new mathematics curriculum, what should be included? A lack of explicit teaching and standardized curriculum of spatial reasoning prompted the conception of an imagined curriculum. In this chapter, we illustrate the complexity of these imagined curriculum outcomes in the context of a child, aged 9, building a robot.

Introduction

Scientific research and complex research infrastructures for sharing and generating knowledge are key characteristics of *learning societies* (see UNESCO, 2005). Meaningful participation in such societies requires mastery of innovations in technology and technological infrastructure, which in turn requires large numbers of engineers and technicians (UNESCO, 2005). The demand for engineers is increasing yet fewer students are choosing STEM disciplines for their careers (UNESCO, 2005). In a literature review of Canada's STEM labour market, Mishagina (2012) argues that there are growing concerns that the nation is not producing enough scientists and engineers compared to other OECD countries, with Canadian enrolment rates in post-secondary natural science and mathematics declining (Mishagina, 2012). Strengthening STEM education is considered vital to encouraging future generations to pursue STEM disciplines.

Strong spatial reasoning skills are required to understand, interpret and create representations of complex information. The unprecedented progress of information technology has transformed how we access information and communicate with each other, and has shifted patterns of production, consumption and access to knowledge. Information technologies are increasingly becoming more spatial with graphical gestural-based interfaces. For instance, early personal computer operating systems like MS DOS provided a text-based user interface, with the Xerox Altos being the first system to develop the modern graphical user interface (Lineback, 2013). Today's operating systems, like Apple's OS X, provide graphical user interfaces, and technology companies like Google and Apple are purchasing companies that specialize in gestural-based interfaces. While the text-based interfaces of the past relied heavily on the alphanumeric, touchscreen interfaces invite haptic forms of expression that are much closer to the spatial domain than the language-based one.

Spatial reasoning skills[1] are indicators of attainment and achievement in STEM disciplines; STEM professionals often have superior spatial reasoning skills (Benbow, 2012). Spatial reasoning is also a predictor of academic achievement in STEM disciplines (Benbow, 2012; Clements & Sarama, 2011; Stumpf & Haldimann, 1997) and beyond (Rohde & Thompson, 2007). Spatial reasoning is integral to the ability to solve problems in mathematics, science, architecture, art and general contexts (Uttal et al., 2013). Geometry and other mathematical topics require spatial reasoning competence (Clements & Sarama, 2011).

[1] We define spatial reasoning skills later in this paper.

Malleability of spatial reasoning

Spatial reasoning is not a fixed skill. It can be developed with training in adults (Newcombe, Uttal, & Sauter, 2013; Sorby, 2009; Uttal et al., 2013) and children (Clements & Sarama, 2011; Ehrlich, Levine, & Goldin-Meadow, 2006; Grissmer, Grimm, Aiyer, Murrah, & Steele, 2010; Newcombe, Uttal, & Sauter, 2013). Conversely, despite daily mathematics teaching and learning in the early years, spatial reasoning can also atrophy over time. Lehrer et al. (1998) found that despite daily mathematical instruction, over time children (Grades 3-5) were less likely to notice attributes of contrasting forms. Not only did the instructional practices not promote conceptual change, but children's spatial reasoning worsened.

Mathematical competencies

Defining spatial reasoning is not easy. Much debate exists within and between communities of researchers on the precise definitions and subdivisions of spatial abilities, spatial cognition, and their relationship to visualization, to experiences with problem solving in spatial contexts, and to the curricular form of geometry. Generally, definitions of spatial reasoning skills[2] include visualizing (imagining putting together) and mental rotation (imagining how two-dimensional and three-dimensional objects appear when rotated) (Casey, Erkut, Ceder, & Young, 2008; Linn & Petersen, 1985); locating and recognizing objects and their paths of motion (Newcombe, 2010); and being able to infer information about three dimensional objects with limited information (Barnett, 2013).

Broadly speaking, spatial reasoning skills include symmetrising, balancing, locating, orienting, decomposing/recomposing, shifting

[2] We are grateful for Tepylo's (2013) literature review for pointing us to these sources of definitions.

dimension, diagramming, navigating, comparing, scaling, feeling, visualizing, transformations and continuity/connectedness (Bruce et al., 2013).

Spatial reasoning teaching and curriculum

The link to mathematics and spatial reasoning has been well established in the psychological literature (Mix & Cheng, 2012), yet deliberate and explicit teaching of spatial reasoning in education is sparse (Newcombe, 2010). Statistically, educators have lower spatial reasoning skills than STEM professionals (Wai, Lubinski, & Benbow, 2009). Of note, the Alberta Program of Studies (Alberta Education, 2007) specifies few (if any) outcomes related to spatial reasoning. For example, the only two Grade 5 Shape and Space Specific outcomes explicitly related to spatial reasoning are: "Identify and describe a single transformation, including a translation, rotation and reflection of 2-D shapes"; and "Perform, concretely, a single transformation (translation, rotation or reflection) of a 2-D shape, and draw the image" (2007, p. 48). In Grade 4, the only explicit outcome related to spatial reasoning is "[d]emonstrate an understanding of line symmetry by: identifying symmetrical 2-D shapes; creating symmetrical 2-D shapes; and drawing one or more lines of symmetry in a 2-D shape" (2007, p. 48). These outcomes do not specify the particular forms that would support developing geoemetric and spatial understandings. As a result, these specific outcomes are often taken up in the classroom in superficial ways.

Given its malleability, and the importance of spatial reasoning to academic success in STEM disciplines, it is surprising that very little spatial reasoning is included in curricula across Canadian provinces, with only a cursory amount of geometry in a form that is both restricted and dated. We argue that if evidence for spatial reasoning is not specified in the curriculum, it is not likely to be explicitly taught or measured as an area of concern for teachers.

Imagining a new curriculum is challenging. Most of what we know of spatial reasoning has come from psychology (see Casey, Dearing, Vasilyeva, Ganley, & Tine, 2011; Kayhan, 2005; Levine, Huttenlocher, Taylor, & Langrock, 1999), so the tendency might be to draw upon psychology for conceptualizing teaching spatial reasoning. However, psychological measures of spatial reasoning are not particularly useful in education because they (1) decontextualize the complexity of spatial reasoning, (2) tend to reduce spatial reasoning to visualization, and (3) do not take into account the types of spatial reasoning relevant to mathematical activity. For instance, Kayhan's (2005) rotation test below requires selecting the shapes that can only be found by rotating the top shape. In this measure, the object and possible rotations are two-dimensional.

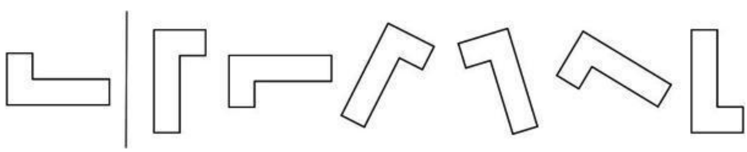


Figure 1. Kayhan's (2005) Rotation Test.

While useful for diagnostic testing and measurement, it is ill-suited for educational purposes. Isolating and developing two-dimensional rotation skills will not necessarily develop three-dimensional rotation skills. Mathematically, rotations are a component of a larger geometric concept called transformations, which include translations, sheers, rotations/turns, reflections/flips, slides, dilations and contractions.

When psychological measures of mathematical skills are implemented in classrooms, the resulting classroom tasks often fragment and isolate the skill and measures become teaching practice (e.g. mad minutes). In contrast, an educational task is both a diagnostic and developmental tool, where assessment of the child's engagement in the task can provide insights into her or his understanding. Additionally, working with, struggling and succeeding in the task provides opportunities for developing skills. Building and programming robots provided such a task where we could both diagnose a child's spatial reasoning skills and the child could further develop them. We drew upon our observations of children's spatial reasoning to create possible curriculum outcomes. In the next section we describe Eric's engagement with building robots, which provides contextualization as an example before discussing our imagined curriculum.

Observations of Eric

Eric, a Grade 4 student at a local elementary school, participated in the IOSTEM robotics camp where he designed, built, and programed Lego Mindstorms™ Robots. This short (2:30 minutes) video recording of Eric occurred on the first day of the camp as he built the robot as instructed in the Lego manual. As Eric built this first robot, many of Bruce et al.'s (2013) list of spatial reasoning skills were observed almost simultaneously, with each step of the construction process demanding the utilization of several spatial skills. In the 2:28 minute long clip Eric completes Step 8-9 of the Lego manual's robot building instructions (see http://www.ucalgary.ca/IOSTEM/media/64).

Step 8

The clip begins when Eric is on Step 8 of the instruction booklet. Step 8 required attaching the second motor to the chassis built on the first. The process of adding the motor required continual back and forth movement between the two-dimensional representation and the three dimensional object.

Eric first began Step 8 by selecting the three-dimensional pieces needed. The process required recognizing the two-dimensional representation as referencing the three-dimensional (continuity/connectedness), finding and selecting the pieces from the large assortment of objects in the orange container (locating) and assembling the pieces (orienting). Both a two-dimensional representation and the three-dimensional objects needed for Step 8 are circled in Figure 2 below. The required items diagrammed in the blue box of the instruction booklet are not to scale, although there is an exact scale diagram of the rod immediately adjacent to the circled blue box. Finding the right objects requires comparing the objects to the representation (comparing/scaling). Eric aligned the objects perpendicular to the diagram (orienting). At first glance, one might consider that this was not deliberate. However, Eric repeatedly oriented the object he was working with in the same alignment as, or perpendicular to, the diagram. The robot chassis with the first motor was centered between two representations on the booklet and aligned perpendicular (almost mirrored) to both. Notice that Eric was holding the motor perpendicular to the images represented on the two-dimensional instruction booklet. The orientation of the robot and materials complemented Eric's ability to move between two and three dimensions.

Figure 2. Step 8.

Next, Eric assembled the pieces. For each piece, he located the proper insertion points by translating the two-dimensional image to the three-dimensional object (navigating). This was a cyclical and repetitive process. Eric proclaimed, "This is really easy." After he inserted each black connecting piece with his right hand, his left thumb gently tapped the top of the piece as if to confirm the placement (somatic sensing).

Each time one of the rods was inserted into another piece, Eric made sure that there were equal proportions on each side of the insertion. He balanced the length of the rod at the insertion keeping symmetry of the composition (balance/symmetry). As Eric moved between the instructional booklet and the emerging robot, he constantly compared shapes and sizes (comparing).

STEP 9

Step 9 required that Eric attach an L-shape to the emerging robot chassis. The shape of the Lego permits a direct comparison to a rotation measure from psychology.

Transformations

In the video (see http://www.ucalgary.ca/IOSTEM/media/64), Eric struggled with transformations, including rotation, to attach an L-shaped piece to the robot he was building.

Eric began Step 9 by finding the L-shape represented in the booklet. In the image below, the L-shape is circled in two two-dimensional representations and the actual three-dimensional object. The two-dimensional shape was not to scale (comparison). There was little hesitation as he picked the L-shape amongst the others in a different orientation than the two-dimensional image (navigation: locating). Next, he inserted the black connector in to the first whole of the L-shape (navigation: orienting, decomposing/ recomposing).

Figure 3. Step 9.

To attach the L-shape to the robot, he aligned the robot to the same orientation as the instruction booklet (navigating: orienting). He appeared unsure how to attach the L-shape to the robot, and incorrectly attempted to attach L-shape to the right lower bar. He compared back and forth between the booklet and the emerging robot chassis. He rotated the L-shape vertically, then horizontally (transformations) and tentatively started to attach the L-shape to the robot. Then, he rotated the top rod with the other L shape. He tried another strategy of moving the top rod down to attach the left L shape to the lower. After successfully attaching the lower and upper rods with the already semi attached L-shape on the left-side, he rotated the right L-shape until it was in the right orientation and successfully attached it (navigating: orienting, decomposing/recomposing, comparing).

In this exchange of moving between the two-dimensional representation and three-dimensional object, Eric was scaling, orienting, rotating, translating, composing shape, comparing, feeling and visualizing.

As indicated above, we consider an educational task as having both diagnostic and developmental functions. The task which engages Eric and in which Eric engages (presented above) provides such opportunities. The video clip permits us to diagnose Eric's ability to rotate and locate. We observe him struggling to attach the L-shape to the right side of the robot. Unlike a strictly diagnostic task, Eric was able, through trial and error of different strategies in a short space of time, to successfully attach the L-shape and thus further develop his skills.

In the next section we elaborate upon observations of children's spatial reasoning, such as the one presented of Eric, to create possible spatial reasoning outcomes.

Imagining a curriculum

After our first morning of helping the children build, design and program a robot to dance, the teachers and researchers set out to map our observations to the Alberta Program of Studies (Alberta Education, 2007). The robotics tasks aligned beautifully with the front matter: communication, connections, problems solving, reasoning, technology, and visualization. The studio-like environment provided lots of opportunities for *communicating* informally. When students had difficulty, they talked amongst themselves for new solution strategies. The children were also able to articulate their thought processes when prompted by teachers and researchers. The final competition provided opportunities for the children to present their mathematical ideas. Programming robots *connected* mathematical ideas, like angles and rotations, to make the robot move in specific ways. Designing, building and programming a robot was a *problem-solving* activity on many levels. Students found their own strategies for completing the task. The problem-solving was multi-layered, engaging, and the children built new understandings of building robots.

For instance, the children used *reasoning* in order to explore, record results, analyze observations, make and test generalizations. As part of the task, the children had the option to sample up to six different water sources located on a fabricated outer space landscape[3]. In sampling another water source, reasoning was required to program the robot to reverse, turn 90º or 180 º, and move forward again. The process of building and programming required the use of *technology* and *visualization*.

However, we stumbled when we tried to find *specific outcomes* that aligned with what we saw. There was nothing in number, pattern, space and shape, or statistics and probability. How could all the described mathematical process be present, yet not align – at all – with the outcomes in the curriculum?

We expected alignment in the General Outcome Space and Shape, which seemed like a natural fit for spatial reasoning. Oddly, very little aligned with our observations. The Space and Shape outcomes for Grades 4 and 5 specified reading time or sorting objects, or measuring lengths, area and volumes of regular and irregular shapes. Statistics and probability did not align because the process of building a robot did not require collecting and analyzing data. With a little stretching, the tasks could be aligned with the *Transformation* outcomes of demonstrating understandings of symmetry, translation, rotation and reflection.

In attempting to envision spatial reasoning for educational settings, we used the list from Bruce et al. (2013) as a starting point for focusing the observations. Bruce et al. (2013) did not include moving between two-dimensions and three-dimensions as a skill. We added this to the specific outcomes due to the repeated appearance of this skill in incidents similar to that observed with Eric. We classified and provided descriptions of specific outcomes for spatial reasoning (see image below). In the next section, we list and describe imagined outcomes to address spatial reasoning in the curriculum.

---

[3] We are grateful to Michael Poscente, an engineer and competitive robotics enthusiast who designed and fabricated the landscape.

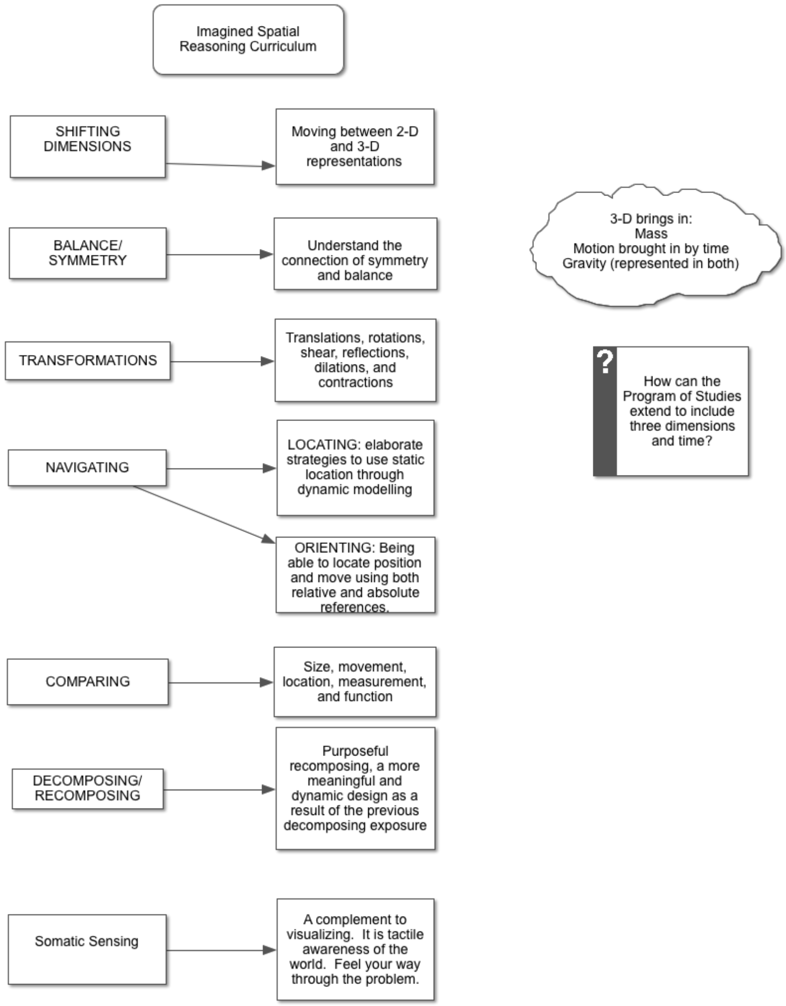


Figure 4: Imagined Spatial Reasoning Curriculum for Mathematics.

Shifting Dimensions

Demonstrating the moving *from* and *between* two-dimensional and three-dimensional shapes with flexibility and fluidity. The two-dimensional representation was the model in the Lego Instructional booklet where each piece, and the stages of construction, were illustrated graphically in the booklet. The three-dimensional representation was the robot at various stages of construction. One indicator of shifting dimensions was the ability to move between the two-dimensional and three-dimensional representations, and keep them consistent as the robot progressed. Another indicator was using a concept map to detail particular elements of the thinking of the design or the movement.

Balance/Symmetry

Demonstrating an understanding of the connection of symmetry and balance. When students were troubleshooting their robot designs they needed to understand how symmetry and/or balance ensured the success of their machines. Many of the pieces required centering in the middle of the attachment, and construction often required two mirroring parts. The robots required achieving dynamic balance of three-dimensional objects in motion.

Transformations

Demonstrating an understanding of translations, rotations, shears, reflections, dilations, and contractions. Constructing the robot required transforming the position of each piece with translations, rotations and reflections. Other examples of transformations include motion of the robotics on the plane, motion of the wheels, motion of the arm, motion of the probes.

Navigating

Orienting: Being able to locate position and move using both relative and absolute references. Relative orienting means there is no specific grid to work on; absolute references are found on an already predetermined grid. The partnership between relative orienting and absolute orienting is an asset. With robots, the screen for programming was absolute orienting; the test arena was relative orienting. For example one of the students asked if he could get the coordinates on the arena to work out the programming.

Locating: Demonstrating elaborate strategies for static location and through dynamic modeling and positioning. For constructing the robot, locating was required for finding the pieces in the grid portioned boxes and for locating connecting pieces. Programming required determining and locating where the robot needed to move.

Comparing

Differentiating between size, movement, location, measurement, and function. Tied with moving between the two and three dimensional representations was the need for comparisons since many pieces came in various sizes, had similar functions, different possibilities for connecting, and different ways of moving. Also, comparing the use of the sensors and the movement of the robot created opportunities for selection.

Decomposing/Recomposing

Purposeful recomposing, a more meaningful and dynamic design as a result of the previous decomposing exposure: part to whole, whole to part. For example, breaking it down and putting the robot back together, seeing how things already fit together and then putting it back together again. The students rebuilt their robots using previous experience with decomposing, and as a result they recomposed a “better” model for the task.

Somatic Sensing

Somatic sensing is a complement to visualizing; it is tactile awareness of the world and feeling your way through the problem. For example, a young child describing a cube will stroke the edges and then obtain a feeling prior to working with it. Every aspect of building the robot was an example of tactile with visualization; e.g., dragging and dropping programming code, building the model, and doing a dance prior to the actual programming.

IMPLICATIONS

Awareness of the importance of spatial reasoning to mathematics and other STEM disciplines is increasing. The NCTM intends to increase spatial reasoning in the early years standards, matching the focus on number (Gojak, 2012), and it is likely Canadian curricula will follow. Before forging ahead, contemplation is required to determine what spatial skills are and how they might be envisioned in educational settings.

As Teacher Educators, we would want to communicate the importance of spatial reasoning skills for mathematics, particularly the malleability of spatial reasoning. Spatial reasoning should be a deliberate and intentional part of the curriculum grounded in multi-sensorial definitions of the phenomena, as exemplified in the robotics task. As we watched children build robots, we observed how they drew upon many spatial skills almost simultaneously. They cycled and recycled through various skills to troubleshoot and construct their robot. The robotics task engaged children's spatial reasoning somatically and haptically, and provided countless opportunities for development.

Many teachers have not had sufficient opportunity for developing their own spatial reasoning and, as such, may have difficulty valuing it. With lower spatial skills (Wai et al., 2009), teachers may not have enough pedagogical content knowledge to effectively teach spatial reasoning; without deliberate professional learning opportunities for teachers, implementing spatial reasoning curricular changes in schools will be difficult, if not impossible.

References

Alberta Education. (2007). *Mathematics Kindergarten to Grade 9 program of studies. Government of Alberta*. Retrieved from http://education.alberta.ca/teachers/program/math/programs.aspx

Barnett, T. (2013). *What Is Spatial Ability? wiseGEEK*. Retrieved September 26, 2013, from http://www.wisegeek.org/what-is-spatial-ability.htm

Benbow, C. P. (2012). Identifying and Nurturing Future Innovators in Science, Technology, Engineering, and Mathematics: A Review of Findings From the Study of Mathematically Precocious Youth. *Peabody Journal of Education, 87*(1), 16-25.

Bruce, C. D., Moss, J., Sinclair, N., Whiteley, W., Okamoto, Y., McGarvey, L., … Davis, B. (2013, April). Early years spatial reasoning: Learning, teaching, and research implications. Presented at the *NCTM research presession: Linking research and practice*, Denver, CO.

Casey, B. M., Dearing, E., Vasilyeva, M., Ganley, C. M., & Tine, M. (2011). Spatial and Numerical Predictors of Measurement Performance: The Moderating Effects of Community Income and Gender. *Journal of Educational Psychology, 103*(2), 296-311.

Casey, B. M., Erkut, S., Ceder, I., & Young, J. M. (2008). Use of a storytelling context to improve girls' and boys' geometry skills in kindergarten. *Journal of Applied Developmental Psychology, 29*(1), 29-48. doi:10.1016/j.appdev.2007.10.005

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Ehrlich, S. B., Levine, S. C., & Goldin-Meadow, S. (2006). The Importance of Gesture in Children's Spatial Reasoning. *Developmental Psychology November 2006*, *42*(6), 1259-1268.

Gojak, L. (2012, April 27). Helping our students become nathematical thinkers. Presidential Address presented at the *NCTM 2012 Annual Meeting, Philadelphia*. Retrieved from http://www.nctm.org/conferences/content.aspx?id=33201

Grissmer, D., Grimm, K. J., Aiyer, S. M., Murrah, W. M., & Steele, J. S. (2010). Fine motor skills and early comprehension of the world: Two new school readiness indicators. *Developmental Psychology*, *46*(5), 1008-1017. doi:10.1037/a0020104

Kayhan, E. B. (2005). *Investigation of high school students' spatial ability*. Middle East Technical University, Turkey. Retrieved from https://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12605771/index.pdf

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environment*. Routledge.

Levine, S. C., Huttenlocher, J., Taylor, A., & Langrock, A. (1999). Early sex differences in spatial skill. *Developmental Psychology, 35*(4), 940-949.

Lineback, N. (2013). Welcome to my GUI gallery. *Nathan's toasty technology page*. Retrieved from http://toastytech.com/guis/alto.html

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development, 56*(6), 1479-1498. doi:10.2307/1130467

Mishagina, N. (2012). *The state of STEM labour markets in Canada literature review* (Industry Canada No. 2012RP-08). Montreal, QC: Center interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (Cirano). Retrieved from http://www.cirano.qc.ca/pdf/publication/2012RP-08.pdf

Mix, K. S., & Cheng, Y.-L. (2012). The relation between space and math: developmental and educational implications. *Advances in child development and behavior, 42*, 197-243.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator, 34*(2), 29-35,.

Rohde, T. E., & Thompson, L. A. (2007). Predicting academic achievement with cognitive ability. *Intelligence, 35*(1), 83-92.

Sorby, S. A. (2009). Educational Research in Developing 3-D Spatial Skills for Engineering Students. *International Journal of Science Education, 31*(3), 459-480.

Spatial Intelligence and Learning Center. (2013). Tests and Instruments. *Spatial Intelligence and Learning Cennter*. Retrieved September 27, 2013, from http://spatiallearning.org/index.php/testsainstruments

Stumpf, H., & Haldimann, M. (1997). Spatial ability and academic success of sixth grade students at international schools. *School Psychology International, 18*(3), 245-259. doi:10.1177/0143034397183005

Tepylo, D. (2013). *Spatial reasoning: Considerations for mathematics educators*. University of Toronto, Toronto, ON.

UNESCO. (2005). *Towards knowledge societies*. Paris, France: UNESCO. Retrieved from http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001418/141843e.pdf

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352-402.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance. *Journal of Educational Psychology November 2009*, *101*(4), 817-835.

CONCLUSIONES: UNA CONVERSACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Armando Paulino Preciado Babb,
Armando Solares Rojas
y Krista Francis

Las opiniones y puntos de vista presentados en este libro representan alternativas al modelo industrial de educación, criticado tanto por argumentos de índole económica (UNESCO, 2005) como de justicia social (Apple, 1996, 2001). Los capítulos de este libro incluyen paradigmas emergentes de *qué* es lo que los profesores de matemáticas deberían saber, *cómo* pueden llegar a saberlo y *por qué* deberían saber estas matemáticas. No intentamos proporcionar respuestas conclusivas, sino formular y fundamentar preguntas cada vez más profundas, basadas en concepciones recientes del conocimiento matemático para los profesores y el aprendizaje de las matemáticas. Todos los capítulos abordan las tres preguntas en forma directa o indirecta: es el enfoque lo que hace la diferencia entre las partes del libro. A pesar de las diferencias sociales y económicas entre Canadá y México, investigadores en ambos países reconocen la necesidad de abordar el conocimiento de los profesores de matemáticas como tema de investigación tanto en su naturaleza como en la forma de desarrollarlo junto con los profesores. Este capítulo final del libro presenta conclusiones en dos secciones. Primero, los temas generales y sugerencias en el libro, y después algunos retos y preguntas que emanaron de las contribuciones de los autores.

TEMAS COMUNES

Un tema común en varios capítulos fue el papel de los profesores en su aprendizaje profesional como cocreadores del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. En varios capítulos de esta obra se encuentran estrategias y exploraciones profundas sobre temas matemáticos de interés para los profesores, que se lograron a partir de la colaboración de los docentes con otros profesores y educadores.

Metz, Marcotte y Preciado, en el capítulo II, proponen estrategias para que los profesores diseñen actividades que promuevan un entendimiento matemático profundo. Lo anterior surge del trabajo en colaboración de maestros con académicos de la universidad y mentores de la Galileo Educational Network Association.

En el capítulo IV, a través de un proyecto en el que profesores e investigadores trabajaron en conjunto en el diseño de clases y en la reflexión colectiva sobre las propias prácticas, Sandoval y Lozano reportan cómo los profesores identificaron la necesidad de integrar prácticas innovadoras usando la tecnología. Las autoras reconocen que su objetivo fue invitar a los profesores a reflexionar y buscar, junto con sus colegas y los investigadores, oportunidades para mejorar las prácticas en beneficio del aprendizaje de los estudiantes. Gutiérrez y Ávila, en el capítulo V, presentan un programa de desarrollo profesional en el que los maestros se involucraron en la resolución de problemas para aplicarlos en sus clases, compararon sus propias soluciones y reflexionaron acerca de los correspondientes conceptos y lenguaje matemáticos, además de las implicaciones pedagógicas.

Por su parte, Davis, en el capítulo VI, propone el *estudio de conceptos* como un mecanismo para el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores. Esto implica un cambio en la concepción de qué es hacer, enseñar y aprender matemáticas mediante un análisis lingüístico, histórico y social de conceptos matemáticos, así como de las implicaciones pedagógicas.

Otro tema en común en los capítulos de esta obra es el entendimiento de las matemáticas más allá de lo que se establece en libros y programas de estudio actuales. Este concepto de matemáticas, y del aprendizaje de matemáticas, podría ser paradójico para aquellos que perciben las matemáticas sólo como un sistema basado en definiciones y razonamiento deductivo formal. D'Amour, Khan, Davis y Metz presentan, en el capítulo I, una crítica a los programas de estudio actuales, que reflejan una visión cartesiana de las matemáticas. Ellos discuten las matemáticas que los profesores deberían saber en términos de una disposición compleja hacia el saber y el ser. Esta aproximación es consistente con la disposición abierta, descrita por Davis en el capítulo VI. Él explica cómo elementos de la cultura y del lenguaje, tales como las metáforas, permean en nuestro aprendizaje y entendimiento de las matemáticas que, a su vez, informan la enseñanza. El cambio de enfoque de las competencias matemáticas hacia el desarrollo del razonamiento espacial, propuesto por Francis, Davis y Khan en el capítulo VII, es crucial para las matemáticas escolares. Este razonamiento está profundamente conectado con la forma en que los seres humanos vivimos en el mundo, en lugar de definiciones matemáticas formales. De manera similar, Solares, en el capítulo III, analiza cómo los profesores organizan sus actividades del aula no sólo a partir de los libros de texto y programas de estudios, sino que también toman en cuenta las necesidades específicas de sus estudiantes, sus propias concepciones y creencias acerca de cómo se aprenden las matemáticas y cómo deberían enseñarse, y sus conocimientos matemáticos específicos. Desde su perspectiva, la propia historia personal de los profesores, las condiciones específicas de sus escuelas y estudiantes, sus conocimientos y recursos culturales son centrales para definir sus prácticas de enseñanza.

Este libro también provee ideas para profesores que podrían informar sus prácticas docentes. El marco del Diseño para el entendimiento profundo de matemáticas, en el capítulo II, es una herramienta para los profesores interesados en planear ambientes de aprendizaje desde la indagación. Basado en la experiencia de trabajar con más de 200 profesores, Davis describe, en el capítulo VI, las estrategias que permiten el estudio de conceptos: sentidos, panoramas, implicaciones, combinaciones y resolución de problemas. Finalmente, en el capítulo VII, Francis, Davis y Khan usan sus observaciones a un grupo de niños construyendo robots y proponen un nuevo currículo sobre el razonamiento espacial.

Retos y futuras investigaciones

De las contribuciones en los capítulos de este libro, nosotros, los editores, identificamos grandes provocaciones, retos y líneas para investigaciones futuras respecto al conocimiento matemático para profesores. Nuestro primer comentario se enfoca en los programas de estudio, pues parece haber una contradicción entre los programas actuales de Alberta y México. En ambos casos, el fundamento presentado al inicio de los programas de matemáticas (Alberta Education, 2014; Secretaría de Educación Básica, 2013) tiene una perspectiva de aprendizaje orientada en la exploración y co-construcción del entendimiento matemático. Sin embargo, están sobrecargados con una larga lista de subtemas que presentan una perspectiva de educación en matemáticas basada en la repetición de conocimiento preestablecido. Tales subtemas reducen y fragmentan la complejidad y las conexiones de los conceptos matemáticos. Por otro lado, nuevas ramas de las matemáticas, como la teoría de números y la teoría de grafos, son ignoradas por los programas de estudios a pesar de su utilidad, importancia matemática y potencial pedagógico en la enseñanza de otros temas, como la aritmética, la combinatoria y la probabilidad.

Otro gran reto es la dificultad de implementar y apoyar los cambios que motiven el aprendizaje de las matemáticas para la enseñanza. En este libro se proponen múltiples formas de colaboración entre profesores e investigadores que pueden ayudar a: proveer oportunidades para que los profesores cuestionen sus prácticas actuales y su conocimiento matemático; proveer oportunidades para cuestionar el currículo; encontrar actividades y herramientas que auxilien la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y diseñar ambientes de aprendizaje ricos en matemáticas.

Evaluar el impacto que tiene el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza en el entendimiento de sus alumnos es una consideración para una futura investigación. Dado que las mismas nociones de matemáticas y aprendizaje se perciben desde distintas perspectivas, la evaluación trae nuevos retos. Davis, en el capítulo VI, hace notar que la evaluación directa del conocimiento matemático no da cuenta de una disposición abierta y del carácter distributivo del conocimiento de la comunidad. Un reto todavía más fuerte es identificar cómo sería esta disposición en lugares remotos en México, donde el papel del profesor se ve influenciado por los recursos y contenidos presentes en la modalidad de Telesecundaria, discutida por Solares en el capítulo III.

Finalmente, aun cuando la educación indígena fue un tema de interés común entre la Escuela de Educación Werklund, de la Universidad de Calgary y la Universidad Pedagógica Nacional, durante el encuentro celebrado en febrero de 2013, este tema no se aborda en el libro. ¿Qué conocimiento matemático deberían saber los profesores para incluir, y aprender de una perspectiva indígena? ¿Cómo desarrollarían los profesores una disposición para este conocimiento incluyendo esta perspectiva? ¿Por qué esto es importante cuando conceptualizamos matemáticas, su aprendizaje, y el papel de los profesores en nuevas formas?

CONCLUSIONS: A CONVERSATION ON MATHEMATICS TEACHER LEARNING

Armando Paulino Preciado Babb,
Armando Solares Rojas,
and Krista Francis

The opinions and points of view in this book represent alternatives to the industrial model in education, criticized with arguments based on both economics (UNESCO, 2005) and social justice (Apple, 1996, 2001). The chapters include emergent paradigms of *what* mathematics teachers should know, *how* they can know it, and *why* they should know this mathematics. All the chapters address these three questions directly or indirectly; it is the focus that makes a difference in the parts of the book. We do not attempt to provide conclusive answers but rather to formulate and underpin deeper questions based on recent conceptions of mathematics knowledge for teachers and mathematics learning. Despite the social and economic differences between Canada and Mexico, researchers in both countries acknowledge the need to address mathematics knowledge for teachers as a research topic on both its nature and the way it may be jointly developed with teachers. This final chapter of the book presents conclusions in two sections: the general themes and suggestions throughout the book, followed by the challenges and further questions resulting from the authors' contributions.

COMMON THEMES

One common theme across many chapters in this book is the role of the teachers in their professional learning as co-creators of knowledge for mathematics teaching. In several chapters of the book there are strategies and deep explorations on mathematical themes of interest for teachers, obtained from the collaboration between teachers and educators.

Metz, Preciado and Marcotte, in Chapter II, propose strategies for teachers to design tasks for promoting deep mathematical understanding. These strategies emerged out of the collaborative work of university professors, teachers, and mentors from Galileo Educational Network Association.

In Chapter IV, through a project in which teachers and educators worked collaboratively in the design of lessons and the collective reflection on their own practices, Sandoval and Lozano report on how teachers identified the need to integrate technologically innovative practices. The authors acknowledge that their work consisted of inviting teachers to reflect and seek opportunities, with both their colleagues and the researchers, for the improvement of teaching practices in benefit of student learning.

Gutiérrez and Avila, in Chapter V, present a professional development program in which teachers engaged in solving mathematical problems to be used in their classrooms, compared their solutions, and reflected on the related mathematical concepts and language, as well as the pedagogical implications.

For his part, Davis, in Chapter VI, propose concept study as a mechanism for the enactment of teachers' mathematics knowledge. This entails a shift in what it means to do, teach and learn mathematics through a linguistic, historical and social analysis of mathematical concepts, as well as a review of the pedagogical implications.

Another common theme in the chapters of this book is the understanding of mathematics beyond what is stated in books and current program of studies. This concept of mathematics, and mathematics learning, might be paradoxical for those who perceive mathematics only as a system based on definitions and formal deductive logic. D'Amour, Davis, Khan, and Metz present, in Chapter I, a critique to the current program of studies that reflect a Cartesian view of mathematics. They discuss what the mathematics teachers should know in terms of a complex disposition toward knowing and being. This approach is consistent with the open disposition described by Davis in Chapter VI. He explains how elements from the culture and the language, such as metaphors, permeate our learning and understanding of mathematics, and how this can inform teaching.

The shift of focus from mathematical competencies to developing spatial reasoning, proposed by Francis, Davis and Khan in Chapter VII, is crucial for school mathematics. This reasoning is deeply connected to the way humans experience the world, rather than formal mathematical definitions. Similarly, Solares, in Chapter III analyzes how teachers organize their classroom activity not only on the basis of textbooks and programs of studies, but also by taking into account the specific needs of their students, their own conceptions and beliefs about how mathematics is learned and should be taught, and their specific mathematical knowledge. From this perspective, teachers' own personal history, the specific conditions of their schools and students, and their knowledge and cultural resources are all central to defining their teaching practices.

This book also provides insights for teachers that could inform their practices. The Design for Deep Mathematical Understanding framework, in Chapter II, is a tool for teachers interested in planning inquiry based learning environments. Based on the experience of working with more than 200 teachers, Davis describes, in Chapter VI, strategies that enable concept study: meanings, landscapes, entailments, blends, and pedagogical problem solving. Finally, Francis, Davis, and Khan, in Chapter VII, draw from observations of children building robots to propose a new curriculum for spatial reasoning.

CHALLENGES AND FUTURE RESEARCH

From the contributions in the chapters of this book we, the editors, identified major provocations, challenges, and venues for future research in mathematics knowledge for teachers. Our first comment focuses on the program of studies, as it seems to be a contradiction in current programs of study in both Alberta and Mexico. In both cases the argument in the front matter of the program of studies in mathematics (Alberta Education, 2014; Secretaría de Educación Básica, 2013) has a learning perspective focused on exploration and co-constructing of mathematical understanding.

Nevertheless, both programs are overwhelmed with a long list of subtopics portraying a perspective on mathematics education as a repetition of pre-established knowledge. These subtopics reduce and fragment the complexity and connections of mathematical concepts. Additionally, new branches of mathematics such as number theory and graph theory, are ignored by the program of studies despite their utility, mathematical relevance, and pedagogical potential for the learning of other topics such as arithmetic, combinatorics, and probability.

Another major challenge is the difficulty of implementing and supporting the changes that motivate the learning of mathematics for teaching. In this book multiple forms of collaboration among teachers and researchers are proposed that can help to: provide opportunities for teachers to question their current practices and mathematical knowledge; provide opportunities to integrate the curriculum; find tasks and tools that support teaching and learning of mathematics; and design mathematically rich learning environments.

Assessing the impact of teachers' knowledge of mathematics for teaching on student understanding is a consideration for future research. As the very notions of mathematics and learning are seen from a different perspective, assessment brings new challenges. Davis, in Chapter VI, noted that immediate assessment of mathematical knowledge does not account for an open disposition and the distributed character of community knowing. A further challenge is identifying what this disposition would look like in remote places in Mexico where the role of the teacher is shaped by the resources and content presented in the 'telesecundaria' modality discussed by Solares in Chapter III.

Finally, although Aboriginal education was identified as a common interest between the Werklund School of Education at the University of Calgary and the National Pedagogical University in the meeting held in February 2013, this topic is not addressed in the book. What mathematics knowing would teachers need to include, and learn from, Aboriginal perspectives? How would teachers develop a disposition for this knowing? And why is this important when conceptualizing mathematics?

Referencias / References

Apple, M. W. (2001). *Política cultural y educación* (2ª Ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Apple, M. W. (1996). *Cultural Politics and Education*. NY: Teacher College Press.

Electronic References

Alberta Education (2014). Programs of Studies. Consultado en junio de 2014 en: http://education.alberta.ca/teachers/program/math/educator/progstudy.aspx

Secretaría de Educación Básica (2013). Portal de la Educación Básica en México. Consultado en junio de 2014 en: http://basica.sep.gob.mx/

UNESCO (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento: Reporte mundial de UNESCO*. París: UNESCO. Consultado en noviembre de 2013 en: http://www.unesco.org/new/en/communication-and-information/resources/publications-and-communication-materials/publications/full-list/towards-knowledge-societies-unesco-world-report/

UNESCO (2005). *Towards knowledge societies: UNESCO world report*. Paris, France: UNESCO. Retrieved in November 2013 from http://www.unesco.org/new/en/communication-and-information/resources/publications-and-communication-materials/publications/full-list/towards-knowledge-societies-unesco-world-report/

Datos de los autores

University of Calgary, Werklund School of Education (Canada)

- Brent Davis
  brent.davis@ucalgary.ca

- Lissa D'amour
  lmdamour@ucalgary.ca

- Krista Francis
  kfrancis@ucalgary.ca

- Steven Khan
  stkhan@ucalgary.ca

- Chenoa Marcotte
  ccmarcot@ucalgary.ca

- Martina Metz
  ccmarcot@ucalgary.ca

- Paulino Preciado Babb
  apprecia@ucalgary.ca

Universidad Pedagógica Nacional (México)

- Alicia Ávila
  aliavi@prodigy.net.mx

- Carmen Gutiérrez
  oligutierrez87@gmail.com

- Ivonne Sandoval
  isandoval@upn.mx

- Armando Solares
  asolares@g.upn.mx

Universidad de las Américas Puebla (México)

- Dolores Lozano
  maria.lozano@udlap.mx

Griselda Mayela Crisóstomo Alcántara: **Subdirectora de Fomento Editorial**
Diseño de portada y formación de interiores: Margarita Morales Sánchez
Diseño de maqueta de portada: Jesica Coronado Zarco
Edición y corrección de estilo: Alma A. Velázquez L.T.

Esta primera edición de *Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas. What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning*, estuvo a cargo de la Subdirección de Fomento Editorial, de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria, de la Universidad Pedagógica Nacional y se publicó el 23 de enero de 2015.