HOMENAJE

Guillermina Waldegg

A UNA TRAYECTORIA

Irma Fuenlabrada
(*compiladora*)

HOMENAJE A UNA TRAYECTORIA:
Guillermina Waldegg

Homenaje a una trayectoria: *Guillermina Waldegg*

Irma Fuenlabrada
(*compiladora*)

Cinvestav-Sede Sur
Departamento de Investigaciones Educativas

COMIE

30 AÑOS
UPN UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

HOMENAJE A UNA TRAYECTORIA:
GUILLERMINA WALDEGG
Irma Fuenlabrada (*compiladora*)

Agradecemos su apoyo al Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, al Consejo Mexicano de Investigación Educativa y a la Universidad Pedagógica Nacional

Cuidado de la edición: Elsa Naccarella/Guadalupe Espinoza
Diseño de portada: Margarita Morales Sánchez

ISBN 978-607-413-005-8

1ª edición, México, DF, 2008

Contenido

Presentación

Los trabajos de investigación de Guillermina Waldegg, desarrollados durante casi 25 años en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, son ampliamente reconocidos no sólo en el ámbito nacional sino también en el internacional. Su versatilidad intelectual le permitió, a través de los diversos estudios que realizó, producir conocimiento tanto en el campo de la educación matemática como en el de la epistemología e historia de la ciencia. Su currículo da amplia cuenta de ello, así como de su interés por participar en procesos de formación de recursos humanos y en proyectos editoriales, o de evaluación y de gestión educativa.

Pero, fundamentalmente, recordamos a Guille como una persona respetuosa del saber y posición del otro, ya fuese éste un niño, un maestro de educación básica, un funcionario o un colega. Capaz de establecer fuertes vínculos de amistad con aquellos que, por diversas razones, tuvimos la suerte de compartir sus conocimientos y experiencias.

El Consejo Mexicano de Investigación Educativa y el Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav convinieron, a través de este libro, honrar la memoria de Guille poniendo a disposición de la comunidad académica y educativa cinco artículos que muestran las incursiones investigativas en las que estuvo involucrada, particularmente en los últimos años.

Los títulos seleccionados con este fin, son trabajos de investigación cuyas referencias originales se mencionan al final de los capítulos porque con ello se pretende destacar el trabajo de Guille, sin dejar de dar los créditos correspondientes a los colegas que secundaron su posicionamiento respecto de la investigación. Para ella se trataba de un trabajo colectivo, que debe propiciar la creación de redes y comunidades de práctica alrededor de ideas medulares de la educación científica.

Irma Fuenlabrada

Introducción

En un libro ya clásico, Antonio Damasio explica *El Error de Descartes*, a saber, intentar la separación entre lo que se siente y lo que se piensa. En sus *Meditaciones*, Descartes formula la pregunta: *¿qué soy?* y se responde: *una sustancia que piensa*. Esta idea del ser humano caracterizado casi exclusivamente por su racionalidad, tenía entonces, ya, una larga historia. Platón, en su diálogo *Fedón*, hace decir a Sócrates, en vísperas de su muerte, que para alcanzar el conocimiento hay que desprenderse del cuerpo, de lo contrario, no se accede a las verdades sin mácula.

La enseñanza de las matemáticas siempre ha estado bajo el influjo de concepciones de corte idealista y empirista. La influencia de Platón es tan marcada que aún hoy sus ideas sobre la intemporalidad de los conceptos matemáticos es moneda corriente. Platón mismo sostenía que los objetos matemáticos eran *formas permanentes*, que no sufrían cambio alguno. Como si fuese su contemporáneo, Leibniz escribía que todas las verdades de la geometría y la aritmética podían ser conocidas tomando en cuenta tan sólo la racionalidad, *sin recurrir a lo aprendido mediante la experiencia*.

Como reflejo especular, tal énfasis en un pensamiento al margen del cuerpo, encuentra eco en la teoría sobre el origen sensorial de las ideas. *Nada hay en el intelecto que no haya estado antes en los sentidos* es una hipótesis que siempre hizo carrera de la mano de los empiristas. Éstos hicieron del sensorio humano la piedra de toque de la racionalidad. La enseñanza de las ciencias naturales ha constituido un puerto seguro para las ideas empiristas. Aún hoy es frecuente escuchar que lo que uno hace en un laboratorio es *extraer* la teoría de los experimentos. Así, a secas.

La epistemología de Kant (1724-1804) es una brillante síntesis del racionalismo y del empirismo. Kant afirma que las impresiones sensoriales pasan por el tamiz de un aparato conceptual (que él imagina constituido por *formas de sensibilidad,*) que ya poseemos y que les da a esas impresiones, como el recipiente al líquido que en él se vierte, *formas* que resultan comprensibles para nuestro entendimiento. Pero, ¿cuál era el *origen* de esas formas de sensibilidad?

El siglo XIX fue escenario de diversas *teorías de origen*. Entre ellas, la teoría de la evolución de Darwin, que mostró fehacientemente el origen de nuestra especie. Teniendo como fondo esta nueva visión del mundo, surge la epistemología genética de Piaget, durante las primeras décadas del siglo XX. Lo *genético* de esta epistemología, nos apresuramos a aclararlo, tiene que ver con los orígenes y el desarrollo de los *instrumentos de conocimiento* que se constituyen a lo largo de la vida y que Piaget describe como el tránsito de unas a otras formas de racionalidad. La dimensión cognitiva de la epistemología genética siempre ha ido de la mano del estudio de la constitución histórica del conocimiento científico: se trata de hallar homologías entre procesos constructivos que ocurren en tiempos y escalas distintos; no se trata de hallar una identidad imposible entre dichos procesos.

Tomando como instrumentos de análisis los mecanismos de pasaje descritos por la epistemología genética (intra-inter-trans), Guillermina analiza la constitución matemática de la noción de infinito actual en la obra de Cantor. Todos los intentos anteriores al de Cantor se habían estrellado con la imposibilidad de constituir un *campo operatorio*. Trayendo a escena un análisis de las paradojas del Infinito descritas por Bolzano, ella muestra, ya en su tesis doctoral, que el infinito se maneja, entre estudiantes del nivel superior, de formas homólogas a como se maneja en la obra de Bolzano. En términos del desarrollo histórico del concepto, las conceptualizaciones de los estudiantes se hayan instaladas al nivel intra-objetal. Por otra parte, el análisis epistemológico correspondiente indica que el trabajo de Cantor pertenece al nivel inter-objetal, de forma sustancial debido a que al renunciar explícitamente a la seducción de su intuición, Cantor abre la posibilidad de un campo operatorio para el infinito actual. ¿Cómo entonces, puede uno preguntarse, es posible seguir sosteniendo una existencia intemporal de los objetos matemáticos a la usanza platónica? Ha sido necesaria la mediación de una noción crucial de las matemáticas (las funciones biyectivas) para constituir el concepto de infinito actual dentro del paraíso cantoriano, como fue descrito por Hilbert. Ni el trabajo epistemológico ni tampoco el trabajo experimental llevado a cabo con los estudiantes, permite conclusiones inmediatas sobre los diseños de trayectorias de aprendizaje. Por ello, en su artículo específico sobre Bolzano y las paradojas del infinito (capitulo 4 de este libro), Guillermina se aproxima al problema de la enseñanza desde un ángulo novedoso que, con claridad meridiana, distingue entre la epistemología como parte de un marco teórico y su traslado acrítico al ámbito educativo.

En el capítulo 2 del libro se presenta el resultado de una investigación sobre la constitución del *número real* y se hace tangible la necesidad del sistema semiótico de representación decimal. En efecto, es solamente mediante este sistema de representación que puede hablarse propiamente de fracciones de la unidad como números genuinos. Recordemos que Stevin, cuyas ideas se estudian en este capítulo, tuvo que luchar contra la noción aristotélica de número que excluía a la unidad. Ésta era el origen del número pero en sí misma, ¡no era un número! Uno de los propósitos de esta investigación es mostrar el cambio epistémico que sufrieron las nociones de número y *variación* que, tiempo después, sirvieron como fermento para el desarrollo del cálculo.

El capítulo 5, que no alcanzó a ver publicado, insinúa ya los nuevos caminos que toma su reflexión. Los temas siguen siendo allí los que alimentaron sus reflexiones previas pero hay un intento de abrir una ventana nueva, de hacer *un corte de caja*, pues las demandas del sistema educativo muestran la necesidad de hacer mucho más explícita la dimensión comunicativa detrás de las trayectorias de aprendizaje. Desde luego, no queremos dar la impresión de que se produce en ella una negación de los instrumentos de análisis que venía manejando y puliendo desde su tesis doctoral, sino un enriquecimiento.

Nadie puede permanecer impasible ante la fuerza de los entornos digitales como *página* para una nueva escritura y para la transformación del conocimiento. Al leer el capítulo 3 del presente libro, queda claro que el conocimiento está *distribuido* en particular entre los miembros de una comunidad de práctica. Que el grado de coherencia entre las prácticas y las creencias del profesor gravitan sustancialmente en su modelo de enseñanza. Se hace explícito que las dificultades en los niveles de innovación tienen origen en restricciones institucionales. Al leer la obra, se me ocurre pensar que no es casual que estas nuevas reflexiones que provienen de sus más recientes esfuerzos, realizados con una alegría infinita por la enorme participación de sus estudiantes graduados, aparezcan como el capítulo 3 de los cinco de que consta el libro. Es un eje simbólico, un parteaguas, que explicita los rumbos de su sensibilidad educativa que nunca desoyó las voces de su entorno, de su comunidad de práctica.

Antonio Damasio vería con sumo agrado, de eso estoy seguro, que la evolución del trabajo de Guillermina no hace sino dar fe que se construye con todos, desde las formas de la sensibilidad que establecen lazos indisociables entre el pensamiento y los sentimientos.

Luis Moreno Armella

La evolución conceptual del infinito matemático actual

Resumen: En este artículo se analizan las diferentes etapas en la evolución conceptual del infinito matemático actual. Mostramos cómo este concepto ocurre entre los estudiantes de la escuela superior a un nivel anterior o, en el mejor de los casos, en el mismo que en la conceptualización de Bernard Bolzano (definida en su trabajo como *las paradojas del infinito*). Además, en términos del desarrollo histórico del concepto, la conceptualización de los estudiantes tiene características de la etapa intra-objetal. Dentro del mismo marco teórico mostramos cómo el trabajo de Cantor se ajusta a la etapa inter-objetal y presentamos las dificultades encontradas por los estudiantes para alcanzar esta etapa, dada la estructura curricular actual. Concluimos que tal evidencia debería ocasionar una reconsideración de las ideas piagetianas en la educación.

Introducción

Esta investigación se realizó bajo el supuesto de que un análisis histórico-crítico de los conceptos puede arrojar luz sobre la construcción del conocimiento. Nuestro propósito aquí es *mostrar* la existencia de etapas bien diferenciadas en el desarrollo histórico del infinito, para relacionarlas con el desarrollo cognitivo del individuo y, en última instancia, estudiar los mecanismos de transición de una etapa a otra. Este estudio tiene la intención de explorar el marco de trabajo piagetiano, el cual justifica la validez de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su historia (Piaget y García, 1983), para sacar conclusiones y ver su alcance.

La historia nos da una visión general de la evolución de un concepto, en el que sobresalen las contribuciones hechas por los científicos más prominentes de cada periodo, quienes lograron establecer estructuras del conocimiento general. Nosotros llamamos a estos individuos representativos los "sujetos epistémicos" de cada periodo. Las características introducidas por el sujeto epistémico en una etapa dada, dentro del desarrollo histórico del concepto, han sido exploradas en diferentes poblaciones estudiantiles y conducen a una clase de homología entre los esquemas de respuesta del sujeto epistémico y aquellos del estudiante en ciertas etapas de su desarrollo intelectual. Aquí nos desviamos de una aproximación psicogenética ortodoxa.

En este documento mostramos que en situaciones que involucran el concepto de infinito, los esquemas de respuesta del estudiante son similares a los esquemas de respuesta dados por los matemáticos a lo largo de la historia de la matemática, incluyendo hasta la época de Bolzano, cuando se enfrentan a este tipo de preguntas.

Al final de este ensayo, mostraremos cómo la instrucción en la escuela actual no ayuda a la evolución de los esquemas de respuesta del estudiante hacia la construcción de las definiciones cantorianas formales.

La comparación entre las etapas de evolución del concepto en el individuo, así como el punto de vista histórico, se realizó tomando en cuenta las formas de existencia del concepto y el campo operacional asociado.

Aquí se ilustrarán dos etapas críticas en el desarrollo histórico del infinito actual: la primera comenzó con los trabajos de Bolzano, quien introdujo el infinito actual en las matemáticas para generar las organizaciones locales que podrían resolver ciertas situaciones paradójicas. La segunda surgió con Cantor, quien hizo posible la incorporación del infinito como un objeto matemático dentro de una organización global. Es necesario tener una idea de las concepciones griegas con respecto a este tema para comprender estas etapas.

El infinito en la cultura griega

El infinito surgió como una categoría filosófica en la obra de Aristóteles, pero no como un "objeto matemático". El carácter potencial del infinito se encuentra en la concepción aristoteliana. No toma en cuenta el carácter de **infinito actual** de la sucesión de los números naturales. Más adelante veremos que, antes de que esto pudiera hacerse posible, el concepto de **conjunto** tenía que ser incorporado en las matemáticas.

Comenzaremos con un análisis gramatical de los roles que la palabra "infinito" tenía en la cultura griega.

1) **Como sustantivo,** sólo aparece en relatos del tipo mitológico, teológico o metafísico: El "**infinito**" pertenece al reino de los dioses.
2) **Como adjetivo** que describe un sustantivo, sólo se usa cuando éste tiene las características de un absoluto, como el Universo, el Ser, Espacio o Tiempo. Aristóteles sólo usa esta forma cuando niega su existencia real (física), ya que el concepto abarca un infinito actual que la filosofía realista aristoteliana no permite.
3) **Como adverbio** de modo, se usa para calificar las **acciones** (mentales), como por ejemplo, extender, subdividir, continuar, sumar, aproximar, etc. Este uso del infinito tiene que ver con lo que llamamos infinito potencial, es decir, cuando el proceso en cuestión **podía** continuar indefinidamente.

En las **matemáticas** griegas, el infinito sólo podía existir como en el tercer caso; su rol como adjetivo o como sustantivo está excluido por razones filosóficas que niegan la existencia ideal o real de "objetos infinitos". Como adverbio, el infinito está vinculado con un **proceso**, y por lo tanto su presencia no puede ser explícita, sino que más bien subyace en el *modus operandi.*

Podemos caracterizar las acciones para estos procesos porque el “resultado final” es inexistente, aun cuando el “punto de partida” esté bien definido. Esto nos lleva a la imposibilidad de ejecutar el proceso a la inversa, por lo que estas acciones tienen la característica de ser “irreversibles”.

Esta forma de existencia del infinito (de calificar una acción), que produce más una manera de pensar que un objeto matemático, dio origen a grandes resultados en las matemáticas griegas –como el método de Eudoxio– pero excluyó la posibilidad del desarrollo hacia una conceptualización matemática del infinito. Sin embargo, como bien se sabe, el infinito potencial subsiste dentro de las matemáticas como el *modus operandi* que constituye el núcleo operatorio del cálculo estándar. Esta evolución histórica es paralela a la del infinito actual y tiene sus propias características.

Para que el concepto de infinito evolucionase hacia su presente estado en las matemáticas del siglo XX, primero fue necesario partir de las concepciones griegas, cambiando el énfasis hacia el segundo rol del infinito (como adjetivo). Para que esto sucediese, fue necesario que se generaran nuevos objetos (conceptuales) que podrían llamarse “infinito”. Estos nuevos objetos eran los conjuntos.

El cambio de enfoque estableció los límites de un nuevo nivel de significado para el infinito, restringiéndolo al terreno matemático. De manera más importante, también permitió el desarrollo de un nuevo campo operacional que más tarde conduciría a su inserción en una estructura.

Tomando en cuenta el hecho de que el objeto de estudio ya no es “infinito” *per se,* sino que más bien se trata de “conjuntos infinitos”, intentaremos identificar las dos etapas conocidas como intra-, e inter-objetal en la evolución del concepto en historia (Piaget y García, 1983).

Bolzano: un primer intento para matematizar el infinito

El trabajo de Bolzano *Las paradojas del infinito* (1851) abrió “oficialmente” la discusión sobre la posibilidad de introducir el infinito en las matemáticas como un objeto de estudio. Como hemos señalado, el paso decisivo a tomar para este propósito era concebir al infinito como un **atributo de una colección**, y no como un sustantivo o un adverbio. Esta fue una contribución importante hacia la develación del misterio que había rodeado al término hasta entonces, dándole al concepto aparentemente etéreo un tipo de "mundo" propio.

Gran parte de la motivación conciente de Bolzano para escribir acerca del infinito se refleja en el título de este libro: *Las paradojas del infinito.* Una serie considerable de paradojas ya se habían producido en esta época, la mayor parte de ellas a causa de la ausencia de un campo operacional, bien definido y bien delimitado, para el infinito.

Bolzano necesitaba un nuevo concepto de infinito para resolver sus paradojas. Parte de este nuevo proceso de conceptualización apareció como una negativa a aceptar las objeciones a la existencia de una infinito actual.

Bolzano empezó considerando estas objeciones y expresando la necesidad de una definición del término **infinito** (Bolzano, p. 75). Su propósito era estudiar las paradojas y mostrar cómo, a causa de la falta de precisión en el uso del término **infinito**, terminaban en contradicciones *aparentes.* Bolzano se olvidó de la metafísica y se dedicó al campo matemático. Para referirse al infinito como un **atributo** de colecciones, abrió una discusión sobre **los conglomerados**, **los conjuntos** y **las multitudes:**

> [...] cada objeto arbitrario A, puede unirse con otro objeto arbitrario B, C, D,... para formar **una totalidad**, o para hablar de una manera más rigurosa, estos objetos ya forman una totalidad sin nuestra intervención y se pueden enunciar numerosas verdades de diferentes grados de importancia –con tal de que A, B, C, D,...realmente representen, uno y cada uno de ellos, un objeto distinto (Bolzano, p. 77).

Un conglomerado cuya naturaleza no atribuya ninguna importancia al orden de sus elementos, y cuyas permutaciones no produzcan, por lo tanto, ningún cambio esencial en su naturaleza, lo llamaré un conjunto, y un conjunto cuyos miembros sean individuos de una especie *A* determinada (es decir, objetos que se pueden subsumir bajo el concepto *A*) se le llama una multitud de *A's* (Bolzano, p. 77).

Queremos señalar que la diferencia entre **conglomerado** y **conjunto** destaca la diferencia entre una colección "estructurada" y una colección "no estructurada". Un conjunto es una colección con cierta estructura que puede ser eliminada. Encontramos que este tipo de discusión evoca la presentada por Freudenthal cuando señala que "…*el problema propio con los conjuntos es el de captarlos y reconocerlos* ***de manera abstracta***" (Freudenthal 1983, p. 34), en otras palabras, reconocer a los conjuntos como colecciones no estructuradas, con su número de elementos (su cardinalidad) como única característica.

Bolzano definió una **multitud infinita** como una en la que cualquier multitud finita sólo puede ser parte de la infinita. Considerando la existencia de estas colecciones infinitas, Bolzano señaló que "*el conjunto de todas las verdades absolutas es un conjunto infinito*" (Bolzano, p. 90). Este argumento acerca del *modo de existencia* muestra que desde el punto de vista de Bolzano, las matemáticas tenían que ver con los conjuntos abstractos; por lo tanto, los criterios de validación para la **existencia** de estas colecciones infinitas tenían que ser nuevos y estar basados principalmente en su naturaleza no contradictoria. Este fue un paso decisivo hacia el abandono de la validación empírica.

La idea principal que apoya el nuevo nivel de representación yace en el hecho de que se abandona la concepción de un conjunto que resulta de un proceso constructivo, por agregación de elementos. En lugar de eso, Bolzano adoptó un concepto sintético de conjunto; esto es, un conjunto es concebido como **una totalidad**, sin la necesidad de pensar separadamente en cada elemento. El ejemplo dado por Bolzano es significativo a este respecto:

> […] puedo pensar el conjunto, la multitud, o si ustedes lo prefieren, la totalidad de los habitantes de Praga o de Pekín sin formarme una representación separada de cada habitante (Bolzano, p. 86).

El cambio del rol del infinito de sustantivo o de adverbio a un atributo, evidencia la presencia de un nuevo nivel de representación en el trabajo de Bolzano, el cual dio origen a un nuevo significado que, a la vez, transformaría el infinito en un objeto dentro de una esfera operacional. Con este nuevo significado, era posible que el infinito se **asimilara** a las matemáticas; sin embargo, un acomodo de las estructuras implicadas aún no había ocurrido, y el proceso de construcción del concepto se había quedado, por lo tanto, sin terminar.

Uno de los puntos clave en la conceptualización de Bolzano era la comparación de conjuntos infinitos. En su estudio sobre los conjuntos infinitos, Bolzano señaló dos posibles criterios de comparación: en primer lugar, se podía establecer una correspondencia uno-a-uno entre dos conjuntos infinitos; en segundo lugar, Bolzano propuso otro tipo de relación que también se podía establecer entre dos conjuntos infinitos, esto es, la relación parte/todo. Este fue el criterio de comparación que Bolzano seleccionó. Entonces, enfatizó que aunque se pudiera establecer una correspondencia uno-a-uno entre un conjunto y un subconjunto propio, esto no constituía una justificación para concluir que estos conjuntos fueran equinumerables. La posibilidad de establecer dicha correspondencia era más bien una característica de los conjuntos infinitos, aunque, de algún modo, una característica paradójica. Debemos señalar aquí una diferencia fundamental entre el trabajo de Cantor y el de Bolzano: el criterio de comparación elegido por Bolzano se basa en las relaciones de inclusión, opuesto al de Cantor, que se centra en comparar los conjuntos mediante la correspondencia uno-a-uno.

La existencia de diferentes infinitos tenía que ser el punto de inicio para el desarrollo de un dominio operacional. Bolzano definió diversas operaciones entre conjuntos infinitos, basadas en el criterio de comparación que él seleccionó. Sin embargo, no pudo alcanzar su meta de aritmetizar el infinito.

Las relaciones conjuntistas definidas por Bolzano son relaciones de tipo intra-objetal porque:

a) Se dio una definición para la comparación entre conjuntos infinitos –el predecesor directo para el establecimiento de funciones uno-a-uno, que caracteriza el acercamiento de Cantor. Sin embargo, esta comparación no da origen a las transformaciones, ya que no define operaciones conjuntistas que pudiesen generar un nuevo conjunto.

b) Los sistemas de verificación son en su mayor parte empíricos, por ejemplo, están basados en las propiedades geométricas (perceptuales) de las figuras, y la comparación está estrechamente ligada a las características geométricas (empíricas) del objeto.

c) No existe evidencia de conservación (en el sentido piagetiano), ya que una figura –vista como un conjunto de puntos sobre el plano– no puede ser distorsionada o transformada (a través de la dilación, por ejemplo) sin cambiar el número de elementos del conjunto de puntos.

d) Ya existe un cierto grado de transitividad en las relaciones usadas por Bolzano, aunque limitadas. Por lo tanto, la aproximación de Bolzano constituye el centro de la estructuración que se requería para la evolución hacia el nivel inter-objetal.

El infinito cantoriano

La teoría de Cantor sobre el infinito representa un punto decisivo en la historia del establecimiento del infinito actual en las matemáticas. Fue entonces que el infinito alcanzó una posición permanente como objeto de estudio con su propia operatividad.

A través de su interés en el estudio de las series trigonométricas, Cantor se dio cuenta de que los conjuntos de puntos infinitos podían llegar a ser un instrumento para analizar el **dominio** de las funciones que se puede representar a través de dichas series. Entonces, se impuso la tarea de "hacer un estudio quirúrgico" de la línea recta, buscando desenmarañar la naturaleza del continuo. Definió para este propósito, por primera vez en la historia, una operación realizada sobre los conjuntos: dada una serie de puntos, se puede construir su **conjunto derivado** (el conjunto de puntos de acumulación del conjunto original). Esta operación significaba que era posible la generación y diferenciación de conjuntos infinitos, de acuerdo con las formas en que sus elementos son "organizados".

Esto llevó a Cantor a confrontar el problema de comparar los conjuntos infinitos de una manera explícita. Como hemos señalado, Bolzano ya había establecido una comparación entre dichos conjuntos, basándose en el criterio de inclusión. El problema de comparación que Cantor planteó es mucho más amplio: si él tuviera que comparar los conjuntos con sus subconjuntos propios, requeriría entonces un método más general donde este tipo de comparación (por inclusión) sólo sería un caso especial, y como él estaría comparando incluso conjuntos que uno no fuera un subconjunto del otro, el criterio no podría depender de las características de los elementos, como hizo con Bolzano. En lugar de eso, se requería de un criterio externo basado en la existencia de un "agente mediador": la relación uno-a-uno entre los elementos de dichos conjuntos. La biyección, como un criterio de comparación entre conjuntos, denota un cambio de pensamiento: el todo podría ahora igualar (con respecto a la numerosidad) a una de sus partes propias (Cantor, 1877, pp. 311- 312).

La correspondencia uno-a-uno hace posible distinguir los conjuntos contables de los no contables. En el nivel geométrico de la representación, y por medio de la verificación empírica, somos incapaces de detectar los instrumentos cognitivos que conducirían al establecimiento de una diferencia entre **densidad** y **continuidad**. Un nivel superior de representación, que incluye la idea de un conjunto (su número cardinal), así como una nueva operatividad, son necesarios para que la comparación se vuelva posible. Se genera, por lo tanto, un cambio metodológico, porque el proceso de verificación deja de ser empírico y se vuelve más dependiente de las necesidades lógicas. El criterio de la biyección se torna un instrumento útil para caracterizar los conjuntos mediante la noción de la potencia de un conjunto, haciendo evidente, de esta manera, el significado epistemológico de este nuevo instrumento.

Cantor usó las expansiones decimales para alcanzar uno de sus resultados más hermosos, a saber, que la línea y el plano son equipotentes. Esto condujo a un cambio en el significado de las expansiones decimales: la combinatoria de los dígitos de la expansión decimal de un número real da la posibilidad de generar nuevo conocimiento. En este nuevo nivel de representación hay transformaciones (por ejemplo, de la línea al plano) que implican "conservación" (en el sentido piagetiano), porque el número cardinal del conjunto permanece invariante a lo largo de la transformación.

La conservación de la cantidad es un prerrequisito para que exista el concepto de número; el uso de los números en cualquier forma sólo es significativo si hay algo –llamado cantidad– que permanezca sin cambio a lo largo de las transformaciones. Según Piaget, la cantidad es una construcción mental que se basa en un sistema de operaciones reversibles de correspondencia, entre los conjuntos. Si las operaciones se pueden invertir, la conservación de la cantidad ya no es sólo empíricamente verificable, sino que también es, bajo ciertas condiciones, una verdad *necesaria*.

No es sorprendente, por lo tanto, que la teoría de Cantor sobre los conjuntos infinitos lo conduzca a una generalización del concepto de **número**. Ya desde sus primeros trabajos la noción de *potencia*, derivada de la correspondencia uno-a-uno, se mostraba como un genuino principio de organización. Sin embargo, este concepto es esencialmente un concepto relativo, lo que significa que aunque permite que se establezca una relación entre dos o más conjuntos, no caracteriza a estos conjuntos de una manera absoluta. Una caracterización absoluta de los conjuntos infinitos se puede dar en términos numéricos, como una extensión de lo que sucede con los conjuntos finitos. Los números cardinales tienen este rol cuando se tornan el criterio de identificación de conjuntos sin estructura (adicional). Aquí tenemos una nueva abstracción de los objetos de estudio que dan origen a la posibilidad de eliminar cualquier estructura que el conjunto pueda tener después de que se haya construido. Esto equivale a reflejar al objeto en un nuevo nivel de representación.

Con una metodología fundada en la realidad inmanente (es decir, la realidad que es independiente de sus posibles "aplicaciones") de los objetos matemáticos, Cantor mostró que sus nuevos números y sus reglas de operación producían una estructura que, de manera consistente, se ajustaba a los números finitos (Cantor, 1883).

Tanto en las operaciones realizadas sobre un conjunto infinito para obtener el conjunto derivado, como en las operaciones de poner los elementos de dos conjuntos infinitos (que podrían ser disyuntos) en correspondencia, la presencia de las siguientes propiedades se vuelve clara: *a)* reversibilidad –el "punto de partida" y el "punto final" están bien definidos; *b)* recursividad –es posible encontrar, por ejemplo, el conjunto derivado del conjunto derivado; *c)* transitividad –si es posible definir una correspondencia uno-a-uno de un conjunto A a un conjunto B, y otra del conjunto B a un conjunto C, existe entonces una correspondencia uno-a-uno de A a C; *d)* asociatividad restringida –en la composición de las funciones biyectivas; *e)* conmutatividad –si A es equipotente con B, entonces B es equipotente con A. Las coordinaciones entre las correspondencias, por un lado, y entre las transformaciones, por el otro, con las propiedades antes mencionadas, son características de las relaciones de la etapa inter-objetal, y así también lo son los principios de conservación (Piaget y García, 1987, p. 123 –edición española).

La diferencia fundamental entre los enfoques de Bolzano y de Cantor se puede explicar en términos del **objeto de estudio**, y en los aspectos donde se centra la atención.

Para Bolzano, el foco de atención se hallaba en **cada uno** de los conjuntos infinitos. Era dentro de los conjuntos donde se podían establecer las comparaciones: había diferentes "grados" de infinito dentro del mismo conjunto infinito, aquellos que corresponden a sus subconjuntos infinitos propios. Bolzano no pudo "partir" un conjunto para –externamente– comparar al conjunto con su subconjunto, porque la esencia propia de la comparación estaba en la inclusión misma. En este sentido, podemos decir que el trabajo de Bolzano muestra características de la etapa **intra-objetal** del desarrollo histórico del concepto. Sólo es posible esta etapa cuando hay una clara delimitación del objeto de estudio; y Bolzano alcanzó esta etapa cuando introdujo el concepto de conjunto. Fue así que apareció la semilla para una tematización del infinito actual, aunque de hecho, el concepto mismo aún no era "tematizado". Esto era porque el sujeto (epistémico) trataba todavía con el problema en situaciones restringidas, con un cierto pragmatismo que no involucraba aspectos estructurales del problema.

Por su lado, Cantor basaba su criterio de comparación en la existencia de una relación biyectiva entre los conjuntos sujetos a comparación. Es claro, por lo tanto, que la introducción de un instrumento de comparación externo sólo se podía lograr si se concibiera a los conjuntos como separados, lo que condujo a la detección de propiedades reflexivas, transitivas y simétricas asociadas con la relación. El foco del estudio de Cantor se hallaba en las relaciones que se podían establecer entre los diferentes conjuntos. A causa de esto, podemos argumentar que el trabajo de Cantor presenta las características de la etapa **inter-objetal** del desarrollo histórico del concepto.

Respuestas del estudiante

Cuando un estudiante entra por primera vez en contacto con los conjuntos infinitos, uno de los conflictos obvios a los que se enfrenta es tener que aceptar que el todo puede ser igual a una de sus partes. En la raíz de este conflicto se encuentra el hecho de que los esquemas intelectuales del individuo surgen de la experiencia cotidiana, en donde se hace evidente que el todo siempre es más grande que cualquiera de sus partes. Esta experiencia le da forma a la "imagen conceptual" que los individuos generan (Tall-Vinner, 1981a). La extrapolación de ciertas propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos, conduce a situaciones contradictorias que los estudiantes no siempre son capaces de superar. Dichas contradicciones revelan la coherencia, aunque sólo sea la coherencia local, de las imágenes conceptuales.

La tensión que el conflicto parte/todo provoca en los estudiantes fue evidente desde las primeras observaciones, tanto en nuestro trabajo como en el de los demás (Fischbein, 1979; Duval, 1983). Cuando el estudiante confronta la tarea de comparar dos conjuntos infinitos, uno de los cuales forma parte del otro, y se da explícitamente una relación biyectiva entre los conjuntos involucrados, siempre surge el conflicto de tener que esclarecer los criterios bajo los cuales dicha comparación se realiza. Encontramos aquí el punto central de la operatoria en el tratamiento matemático del infinito actual y, por lo tanto, este problema se convierte en la esencia del experimento.

A la luz de nuestra discusión anterior, una condición necesaria, aunque no suficiente, para lograr el establecimiento de la correspondencia biyectiva como instrumento de comparación entre conjuntos infinitos, está en la posibilidad de concebir estos conjuntos infinitos de una manera sintética. Como señalamos antes, esta fue la piedra angular de la aproximación de Bolzano para ocuparse del infinito matemático.

Cuando se confrontan las preguntas: *¿Por qué es infinito el conjunto de los enteros?* y *¿Por qué es infinito el número de puntos en un segmento?*, algunos estudiante respondieron respectivamente: "*porque cada entero tiene un sucesor*" y "*porque entre dos puntos siempre hay un punto*". Estas respuestas están basadas en la concepción "constructiva" de una secuencia que es definida en términos de la regla que la genera. No obstante, esta concepción lleva consigo, de manera implícita, la imposibilidad de completar el proceso. Como hemos señalado antes, en sus *Paradojas*, Bolzano rechaza los argumentos de aquellos que sostienen que la reunión de todos los elementos de una secuencia para constituir un todo es una imposibilidad, incluso para la mente. La respuesta de Bolzano es que este argumento está basado en la idea errónea de que para construir el conjunto que contiene los elementos *a, b, c, d,…*, éstos deben ser primeramente concebidos como separados. Bolzano continúa diciendo que, en lugar de eso, lo que es cierto es que el todo puede ser imaginado sin tener que construir una representación separada para cada uno de los elementos del conjunto (Bolzano, p. 86). Bolzano señala aquí una característica básica del concepto conjunto: el conjunto de un objeto **sincrético**. Mientras esta representación no se alcance, tampoco se alcanzará la representación del **infinito actual**.

La conceptualización rudimentaria de los conjuntos infinitos manifestados por los estudiantes da evidencia del surgimiento de contradicciones a las que sólo es posible dar respuestas localmente coherentes, pero que fracasan en situaciones más generales. Detrás de la noción de los estudiantes sobre los "conjuntos infinitos", sólo está la idea constructivista que da origen al **infinito potencial** que, debido a sus propias características, implica un proceso **irreversible** y genera una obstrucción para la actualización del proceso.

Durante la fase experimental de nuestra investigación, se diseñaron tres cuestionarios que involucraban la comparación entre un conjunto infinito y un subconjunto propio (ver Anexo). En el primer cuestionario, la situación fue presentada en un contexto aritmético; en el segundo, fue presentada en un contexto geométrico; y en el tercero, fue hecha combinando los contextos anteriores y usando un lenguaje algebraico.

El primer cuestionario se le dio a un grupo experimental de 20 estudiantes universitarios del primer semestre que cursaban la carrera de matemáticas y cuyas edades fluctuaban entre los 18 y los 20 años. Los otros dos cuestionarios fueron respondidos por 24 estudiantes del mismo nivel, 8 de ellos pertenecían a ambos grupos experimentales. Hasta el momento de la aplicación de los cuestionarios, los estudiantes no habían recibido una instrucción formal (en la escuela) acerca de los temas relacionados con el infinito actual. Por lo tanto, sus respuestas se podían interpretar como espontáneas.

Se realizó un tipo de análisis interpretativo basado en preguntas y respuestas abiertas. Este análisis se centró en los tipos de argumentos que dieron los estudiantes para justificar sus respuestas, sin mucha preocupación por la corrección matemática de las mismas.

La estructura de los tres cuestionarios es análoga a los del trabajo de R. Duval (Duval, 1983), que sirvieron como modelo. En cada uno de estos cuestionarios, hay un conjunto infinito A, un subconjunto infinito propio B, y una correspondencia uno-a-uno entre sus elementos. La primera parte de cada cuestionario enfatiza la inclusión de B en A, y tiene el propósito de pedir a los estudiantes que realicen una primera comparación entre estos conjuntos en términos de su numerosidad. En la segunda parte se muestra la presencia de una biyección desdoblando explícitamente los conjuntos involucrados (el subconjunto se ve como un conjunto por sí mismo), y una vez más se les pide que hagan una comparación de los conjuntos en términos de su numerosidad.

Con respecto a los conjuntos A y B, las situaciones dadas tienen tres aspectos característicos:

I. Los conjuntos son infinitos
II. B es un subconjunto propio de A
III. Los dos conjuntos son equipotentes

Al principio, tratamos de determinar cuál de estos aspectos era más relevante para los estudiantes para responder a las preguntas. Se hizo un análisis interpretativo con respecto a la focalización de los estudiantes sobre estos aspectos, porque no podíamos hallar una relación entre las respuestas y los argumentos correctos.

En el primer cuestionario se dieron dos comparaciones entre conjuntos numéricos: *a)* el conjunto de números naturales con el conjunto de sus cuadrados y *b)* el conjunto de números naturales con el conjunto de los números pares.

Estas comparaciones son presentadas en dos situaciones diferentes: al principio, enfatizamos el hecho de que el conjunto de los cuadrados (o el conjunto de números pares) es un subconjunto propio del conjunto de los números naturales. Presentamos entonces la situación en donde se establece una correspondencia uno-a-uno, que conduciría a la conclusión de que los dos conjuntos son equipotentes.

Estas comparaciones generan un conflicto que involucra la experiencia concreta del estudiante y a la construcción intelectual de los conjuntos infinitos. La evidencia de una correspondencia entre un conjunto y uno de sus subconjuntos propios, nos lleva a la conclusión de que los conjuntos tienen igual numerosidad. Esta conclusión va en contra de la intuición desarrollada en contextos finitos. El uso de la analogía impide el acceso a un nivel más alto de representación.

El problema de *desdoblar* un conjunto, como Duval lo señaló, también está presente en esta situación, ya que un elemento dado debe jugar el doble rol de pertenecer a ambos conjuntos, de modo que uno puede comparar a los conjuntos con la ayuda de un agente externo (una biyección).

El segundo cuestionario se refiere a la comparación de los conjuntos de puntos en segmentos o en regiones planas. En esta situación, los conjuntos a comparar se presentaron aislados entre sí, de tal manera que para poder usar el criterio de inclusión, los estudiantes tenían primero que mover, mentalmente, un conjunto sobre el otro. Dos factores potencialmente conflictivos sobresalen en este cuestionario: *a)* los conjuntos que se van a comparar son continuos, lo que significa que los métodos de "conteo" usados para los conjuntos discretos no se pueden emplear, y *b)* los conjuntos son localizados en regiones acotadas de la recta o del plano, lo que es en sí un obstáculo para su cuantificación infinita. La situación geométrica nos lleva a razonar de modo diferente al empleado en el contexto de los conjuntos numéricos. Para poder abordar este problema en términos cantorianos, debemos acceder a un nivel que permita *el olvido* temporal de la representación geométrica.

El tercer cuestionario es una combinación, haciendo uso del lenguaje algebraico, de los dos contextos –el numérico y el geométrico. El cuestionario presupone que los estudiantes acepten la correspondencia entre los números reales y los puntos sobre una recta. Por lo tanto, se les pide que comparen el conjunto de los puntos en el intervalo cerrado [0, 1] con el conjunto de los puntos en el intervalo cerrado [0, 2], después de establecer la correspondencia uno-a-uno dada por la fórmula algebraica $y=2x$. Este nivel de representación donde prevalece lo operacional, opuesto a las situaciones previamente descritas, permitió a la mayor parte de los estudiantes afirmar que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, y muchos de los obstáculos observados en los casos anteriores parecen haber desaparecido.

Ya hemos señalado que una concepción basada en un proceso de generación efectiva de los elementos de un conjunto, impide una aproximación "actual" al problema del infinito. Sin embargo, nos ocuparemos ahora del estudio de los esquemas de respuesta de los estudiantes que todavía presentan esta concepción insuficiente. En general, esta comparación, tanto en los contextos aritméticos como geométricos, es establecida al estilo de Bolzano. Es decir, el énfasis se halla en la relación parte-todo.

Nuestro análisis inicial de las respuestas tomó en cuenta las preguntas relacionadas con la comparación entre dos conjuntos. El objetivo de este análisis, como lo hemos dicho, era determinar en qué aspecto de la situación se había concentrado el estudiante para responder la pregunta. Las preguntas seleccionadas fueron las siguientes:

CUESTIONARIO I

Parte uno:	Pregunta 6: ¿Hay más números enteros que cuadrados (o igual cantidad)?
Parte dos:	Preguntas 9-10: ¿Tiene el conjunto de números enteros más elementos que el conjunto de los números cuadrados (o igual cantidad)?
	Preguntas 11-12: ¿Tiene el conjunto de números enteros más elementos que el conjunto de números pares (o igual cantidad)?

CUESTIONARIO II

Parte uno:	Pregunta 3: ¿Tiene *CD* más puntos que (o tantos como) *AB*?
Parte dos:	Preguntas 8-9: ¿Tiene *CD* más puntos que (o tantos como) *AB*?
	Preguntas 12-13: ¿Tiene *C* más puntos que (o tantos como) *AB*?

CUESTIONARIO III

Pregunta 2: ¿El conjunto *A* y el conjunto *B* tienen el mismo número de elementos?

Un total de 220 respuestas fueron obtenidas y clasificadas de acuerdo con el tipo de argumento que dieron los estudiantes en apoyo de sus respuestas. La clasificación se puede ver en la tabla 1.

Como lo muestra la tabla, las respuestas de los estudiantes al comparar los conjuntos están guiadas principalmente por las relaciones de contenencia que existen entre los conjuntos. Con excepción del cuestionario III, que propiciaba cierta independencia de contexto, la mayoría de las respuestas se centró en la relación parte-todo. En segundo lugar, las respuestas se centraron en el carácter infinito de los conjuntos y, finalmente, en la relación de biyección.

Tabla 1
Aspectos predominantes en las respuestas de los estudiantes

Aspecto	Frecuencia				
	Preg. I	*Preg. II*	*Preg. III*	*Total*	*%*
A y *B* son infinitos	26	21	1	48	22
B es un subconjunto de *A*	38	56	1	95	43
Hay una bisección entre *A* y *B*	21	12	18	51	2
Respuesta inclasificable	7	5	1	13	6
Sin respuesta	8	2	3	13	6
Total	100	96	24	220	100

En el primer cuestionario (el aritmético), la comparación entre el conjunto de todos los números naturales y el conjunto de los números pares llevó al siguiente tipo de respuesta:

> El conjunto de números naturales contiene números pares e impares. Entonces, el conjunto de números pares contiene menos elementos que el conjunto de números naturales.

Cuando se compara el conjunto de números naturales con el conjunto de números cuadrados (naturales), se obtienen respuestas como las siguientes:

> Hay una infinidad de números naturales que no son números cuadrados, aunque ambos conjuntos son infinitos.

Cuarenta y tres por ciento de las respuestas obtenidas se ajustan a este esquema (ver tabla 1), en concordancia con la concepción de Bolzano. Sin embargo, debemos decir que el 22% de las respuestas ni siquiera alcanzan este nivel. Se puede deducir de estas respuestas que los estudiantes no pensaban que la comparación de estos conjuntos fuera posible, precisamente, a causa de su naturaleza infinita. Como ejemplo, presentamos los siguientes esquemas de respuesta:

> Como los conjuntos son infinitos, no se puede establecer una relación entre ellos.
>
> y:
>
> Todos los conjuntos infinitos son iguales.

Estos esquemas son reminiscentes de las concepciones de Galileo, como lo muestra la siguiente cita:

> Cuando intentamos, con nuestras mentes finitas discutir lo infinito, le asignamos aquellas propiedades que damos a lo finito y limitado; pero creo que esto no está bien, porque no podemos hablar de cantidades infinitas como que una es mayor o menor o igual a la otra. (Galilei, pp. 31-32).

El argumento anterior tiene su fundamento en la comparación entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números cuadrados. Así, el mismo argumento es transferido al contexto geométrico: “Una línea no contiene más o menos o sólo tantos puntos como otra, sino que cada línea contiene un número infinito” (Galilei, pp. 31-32).

En el cuestionario geométrico, se dio la comparación entre los conjuntos de puntos de dos segmentos de diferente longitud, así como la comparación entre un segmento y la superficie de un cuadrado. De las 96 respuestas dadas, 56 muestran una concepción donde las características geométricas de las figuras determinan el “tamaño” de los conjuntos correspondientes, sin que se permita la posibilidad de establecer la conservación de la cantidad. De nuevo, el nivel de representación se vuelve un obstáculo para entrar a un campo más amplio de significado. La posición de Bolzano a este respecto es la misma que adoptaron los estudiantes, como lo muestra la siguiente cita:

> Sea E el conjunto de puntos que se hallan entre *a* y *b*, ambos incluidos… El conjunto de puntos en la superficie de un cuadrado del lado *ab* incluyendo su periferia será igual a E^2… Debemos atribuir a una línea recta completa una longitud infinita y a su conjunto de puntos una numerosidad una infinidad de veces más grande que la del segmento unitario de la recta (extracto de Bolzano, pp. 150-151).

Sin embargo, a diferencia de Bolzano, los estudiantes no pudieron desprenderse de la situación paradójica implicada aquí, y cuando la biyección entre los conjuntos se hizo patente, simplemente ignoraron las consecuencias extraídas de este hecho con respecto a la numerosidad de los conjuntos. Por ejemplo, surgieron inmediatamente situaciones contradictorias con el cuestionario II:

1) Para cada punto en el segmento *CD*, ¿hay un punto en el segmento *AB*?
2) Para cada punto en *AB*, ¿hay un punto en *CD*?
3) ¿Todos los puntos en *CD* tienen un punto correspondiente en *AB*?
4) ¿Todos los puntos en *AB* tienen un punto correspondiente en *CD*?
5) ¿Tiene *CD* más puntos que *AB*?

De los 24 estudiantes que respondieron a ese cuestionario, 5 lo hicieron en forma afirmativa a todas las preguntas de la secuencia anterior, justificando la última afirmación con argumentos del tipo "*CD es más largo que AB*", sin mostrar ningún interés por la inconsistencia lógica en la que estaban cayendo. Hay dos niveles de abstracción en esta secuencia de respuestas: la primera, con la que las primeras cuatro preguntas pueden ser adecuadamente respondidas, supone una idea abstracta de un punto sin dimensión, y la generalización de la construcción dada a todos los casos posibles. El segundo nivel, que se vuelve dominante y determina la conclusión de la secuencia, está anclado a la percepción de la representación geométrica e impide el establecimiento de una conexión entre el primer razonamiento y el segundo.

Hay una minoría de estudiantes que parecen aceptar la biyección como un criterio adecuado para comparar (la numerosidad de) los dos conjuntos. Pero en un estudio anterior (Waldegg, 1988) ya no era claro que los estudiantes fueran a aceptar este criterio como el adecuado. En realidad, los estudiantes no estaban concientes de la inestabilidad de sus instrumentos, y no había nada que los obligara a buscar nuevos medios de aproximación a las situaciones contradictorias.

Para concluir esta sección, nos gustaría señalar algunos de los aspectos que determinan el paso de un nivel de conceptualización al siguiente, y que generalmente no se vieron en las respuestas:

1) El acceso a la fase intra-objetal en la evolución de la infinito actual sólo es posible cuando llega a ser claramente identificada dentro de la disciplina. En este caso, sólo cuando se puede concebir un conjunto infinito como un todo, abstrayendo la individualidad de sus elementos y la generación de sus reglas, se hace posible incluirlo a las matemáticas y darle la característica de un "objeto de estudio". Centrar nuestra atención en el proceso de generación de un conjunto elemento por elemento impide la conceptualización del "cuando se termina la construcción", e impide, por lo tanto, cualquier posibilidad de invertir el proceso.

2) Una comparación que dependa de los **métodos empíricos** de verificación (por ejemplo, sobre las características de una figura geométrica o sobre el "ordenamiento" de los elementos de un conjunto numérico), muestra uno de los rasgos de la etapa intra-objetal. La encontramos, por ejemplo, en la siguiente respuesta: "Los números pares 'saltan' a los impares en la secuencia numérica".

3) No hay desdoblamiento de los conjuntos; la situación es incluso forzada, así es que uno puede ignorar este hecho aun cuando los conjuntos sean disjuntos. Para tener logros en la etapa ínter-lógica, se debe considerar la posibilidad de desdoblar un conjunto, de forma tal que el proceso de compararlo con sus partes requiera de la presencia de un agente externo. Entonces, este agente externo se convierte en el objeto de estudio.

4) La comparación entre los conjuntos, definida por los estudiantes, no da origen a las transformaciones y no permite el desarrollo de una operatividad. Este criterio de comparación y la irreversibilidad del proceso impide el establecimiento de la conservación de cantidad, la cual es necesaria para tener acceso a la nueva etapa ínter-objetal.

5) Hay algunos niveles de representación, por ejemplo el algebraico, que parecen facilitar el acceso a la etapa ínter-objetal, permitiendo la existencia de una operatividad independiente del significado. Sin embargo, este nivel no resuelve las paradojas, sólo las oculta. Desde nuestra perspectiva, esta observación abre un campo para la experimentación que podría permitirnos determinar hasta qué grado los estudiantes pueden sostenerse en sus afirmaciones a pesar de las situaciones paradójicas que derivan de ellos.

6) El contexto geométrico, lleno como está de significados y basado en la verificación empírica, parece impedir el acceso a los niveles superiores de conceptualización. En realidad, esto fue confirmado por otro estudio donde hallamos que a pesar de la instrucción previa sobre los conjuntos infinitos, cuando el contexto geométrico estaba implicado, los estudiantes ignoraban la instrucción y daban respuestas basados en sus preconcepciones. Los resultados de esta investigación serán publicados en un artículo en preparación.

Apéndice

Cuestionario I

Parte uno

1. Encierra los números que son cuadrados perfectos en la siguiente lista

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	45	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	95	95	96	97	98	99	100

2. ¿Cuántos cuadrados hay en la lista?

3. Si continuáramos la lista hasta: 100, 10 000, 1000 000 000, ¿cuántos cuadrados habría en cada caso?

Preguntas de la 4 a la 6, encierra la respuesta correcta.

4. Si tomamos *todos* los números enteros, la cantidad de ellos

es muy grande, pero finita	SÍ	NO	NO SÉ
¿Una infinidad?	SÍ	NO	NO SÉ

Explica tu respuesta

5. Si tomamos todos los cuadrados perfectos, la cantidad de ellos

es muy grande, pero finita	SÍ	NO	NO SÉ
¿Una infinidad?	SÍ	NO	NO SÉ

Explica tu respuesta

6. Piensa en *todos* los números enteros, hay más números enteros que cuadrados SÍ NO NO SÉ

   ¿tantos números enteros como cuadrados? SÍ NO NO SÉ

   Explica tu respuesta.

Parte dos

Imagina una máquina que produce números enteros y que nunca se detiene.
Imagina otra máquina que produce números cuadrados y que nunca se detiene.

Primera máquina:	1	2	3	4	5	6	7…
Segunda máquina:	1	4	9	16	25	36	49…

7. ¿Hay números tan grandes que la segunda máquina podría no ser capaz de encontrar el cuadrado? Explica tu respuesta.

8. ¿Cada número entero tiene un cuadrado? Explica tu respuesta.

Si tuvieras que comparar el conjunto de números enteros 1, 2, 3, 4, 5,… con el conjunto de todos los cuadrados 1, 4, 9, 16, 25,…

9. ¿El conjunto de números enteros tendría más elementos que el conjunto de los cuadrados?

   SÍ NO NO SÉ

   Explica tu respuesta

10. ¿El conjunto de números enteros tendría tantos elementos como el conjunto de los cuadrados?

    SÍ NO NO SÉ

    Explica tu respuesta

Si tuvieras que comparar el conjunto de todos los números enteros 1, 2, 3, 4, 5,… con el conjunto de los números pares 2, 4, 6, 8, 10,…

11. ¿El conjunto de números enteros tendría más elementos que el conjunto de los números pares?

    SÍ NO NO SÉ

    Explica tu respuesta

12. ¿El conjunto de números enteros tendría tantos elementos como el conjunto de los números pares?

    SÍ NO NO SÉ

    Explica tu respuesta

Cuestionario II

Contesta las siguientes preguntas poniendo un círculo alrededor de la respuesta correcta

Mira el segmento *AB* que mide 4 centímetros de largo y el segmento *CD* que mide 6 centímetros de largo (figura 1).

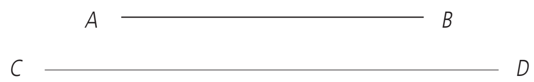


Figura 1

1. ¿Crees que ambos segmentos están
   constituidos por puntos? SÍ NO NO SÉ
2. Si tu respuesta es "SÍ", ¿habrá un número de puntos
   muy grande en *AB*, pero finito? SÍ NO NO SÉ
   ¿Una infinidad de puntos? SÍ NO NO SÉ
3. Si tuvieras que comparar los puntos en el segmento *AB* con los puntos en el segmento *CD*
   ¿Tiene *CD* más puntos que *AB*? SÍ NO NO SÉ
   ¿Tiene *CD* tantos puntos como *AB*? SÍ NO NO SÉ

Mira los segmentos *AB* y *CD* de nuevo. Dibujemos las líneas punteadas *CA* y *DB* que hacen intersección en *0*. Dejemos que *P* sea cualquier punto en *CD*, al dibujar *P0* determinamos el punto *P'* en *AB* (figura 2)

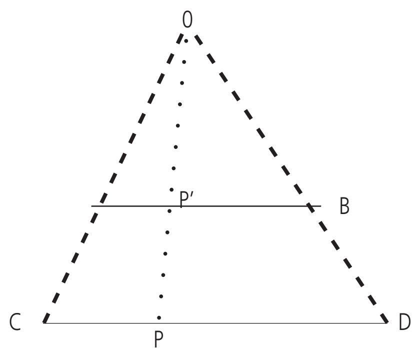


Figura 2

4. Para cada punto en *CD*, ¿hay un punto en *AB* determinado de esta manera?
   SÍ NO NO SÉ
   Explica tu respuesta

5. Para cada punto en *AB*, ¿hay un punto que le corresponde en *CD*?
   SÍ NO NO SÉ
   Explica tu respuesta

6. ¿Todos los puntos en *CD* tienen un punto que le corresponde en *AB*?
   SÍ NO NO SÉ
   Explica tu respuesta

7. ¿Todos los puntos en *AB* tienen un punto que le corresponde en *CD*?
   SÍ NO NO SÉ
   Explica tu respuesta.

8. ¿Tiene *CD* más puntos que *AB*?
   SÍ NO NO SÉ
   Explica tu respuesta

9. ¿Tiene *CD* tantos puntos como *AB*?
   SÍ NO NO SÉ
   Explica tu respuesta

Mira el segmento *AB* que tiene 1 centímetro de largo y el cuadrado *C* con sus lados de 1 centímetro de largo (figura 3)

Figura 3

10. ¿Hay un punto en *AB* para cada punto en *C*?
    SÍ NO NO SÉ
    Explica tu respuesta

11. ¿Hay un punto en *C* para cada punto en *AB*?
    SÍ NO NO SÉ
    Explica tu respuesta

12. ¿Tiene *C* más puntos que *AB*?
    SÍ NO NO SÉ
    Explica tu respuesta.

13. ¿Tiene *C* tantos puntos como *AB*?
    SÍ NO NO SÉ
    Explica tu respuesta

Cuestionario III

Contesta las siguientes preguntas poniendo un círculo alrededor de la respuesta correcta

Considera el conjunto A formado por todos los números reales situados entre 0 y 1. Considera el conjunto B formado por todos los números de la forma 2x donde x está en A. Los elementos de B se consiguen haciendo "saltar" 2 unidades a los elementos de A (figura 4).

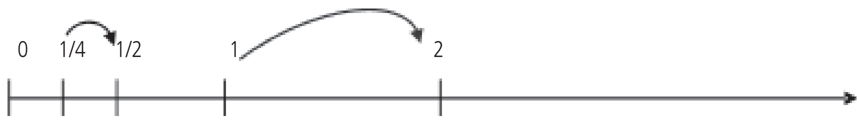


Figura 4

Entonces, 0 no cambia de posición, 1/4 salta hasta ½ (su nueva posición); el 1 salta hasta 2, y así sucesivamente.

1. ¿Tiene el conjunto *B todos* los puntos del intervalo [0, 2]?

   SÍ NO NO SÉ

   Explica tu respuesta.

2. ¿Tienen el conjunto *A* y el conjunto *B* el mismo número de elementos?

   SÍ NO NO SÉ

   Explica tu respuesta

Moreno, L. y Waldegg, G. (1991). "The conceptual evolution of actual mathematical infinity", *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3): 211-231.

Traducción: Juan Carlos García Palmeros, DIE-Cinvestav.

Una historia epistemológica de número y variación

Resumen: En este trabajo trazamos una línea de desarrollos que relaciona la epistemología del número y la variación. En lugar de seguir un camino histórico detallado, presentamos algunas "instantáneas" de estos desarrollos: desde las primeras categorías griegas binarias de número discreto y magnitud continua, a través de la unificación de Stevin de estas nociones como consecuencia de la introducción de los decimales; desde el uso de Oresme de las formas y el estudio de Galileo de las curvas como una representación geométrica para la variación, conjuntamente con la idea de Vieta de la cantidad variable algebraica, a la conjunción de Descartes de estos conceptos en la invención de la geometría analítica. Con esto, nuestra intención es enfatizar el cambio epistémico en los conceptos de número y magnitud, y la evolución de la idea de cantidad variable por tener un significado central en la historia de las matemáticas.

Introducción

Se ha mencionado (ver por ejemplo Klein, 1968 y Jones, 1978) que el concepto de número euclidiano provino de las obras de Pitágoras y de Aristóteles. Hay dos elementos en esta historia que, desde nuestro punto de vista actual, son sorprendentes: *i) uno* no es un número y *ii)* el *número* sólo puede aplicarse al estudio de las colecciones discretas; en otras palabras, no había noción de continuidad asociada con el concepto de número. Debido a estas características, deseamos identificar el momento en el que el número y la magnitud (continua) se integran en el mismo concepto.

Debemos recordar que Aristóteles rechazó la Paradoja de la Flecha al decir que el tiempo no podía estar compuesto de momentos, y que las líneas no podían estar formadas de puntos, lo cual era una manera de decir que la categoría de *cantidad* tenía dos componentes inconexos: el (número) discreto y la (magnitud) continua. Estos componentes se reflejaron en la matemática como el estudio de las magnitudes y los números, i.e., como el estudio de la geometría y la aritmética. Para Aristóteles, la continuidad se caracterizaba como la divisibilidad sin cuenta, de la cual era posible concluir que la línea no podía estar compuesta de puntos. Las líneas y los puntos pertenecían a dos campos matemáticos diferentes.

El continuo geométrico aparecía como una abstracción del continuo físico. Debido a la caracterización de la continuidad como la divisibilidad que nunca termina, fue posible concluir que lo continuo no estaba formado de indivisibles. Por otro lado, el número era el prototipo de lo discreto; el número era una colección de unidades y la unidad no era un número.

Este escenario cambió de manera radical con el trabajo de Simon Stevin. El concepto griego de número se había desarrollado como resultado de un proceso de abstracción aplicado al mundo material. Stevin desafió el punto de vista griego sobre la medida, una perspectiva que encontraremos elaborada más adelante. Las concepciones euclidianas se hallaban tan profundamente enraizadas que fue necesario para Stevin argumentar en contra de esta tradición, tanto desde el punto de vista práctico como desde una perspectiva epistemológica. No se trataba tan solo de decir “uno es un número,” sino de producir un argumento sólido para justificar esa afirmación.

Volvamos ahora a la matemática griega, con una mirada necesaria para entender la atmósfera conceptual en la que Stevin desarrolló su trabajo y que también sirvió de sustento para la construcción del lenguaje algebraico y la noción de variación.

El concepto griego de cantidad

Aristóteles introdujo la *cantidad* como una de las ocho categorías esenciales del pensamiento (Aristóteles, *Categorías* lb, 25) y la *divisibilidad* como la operación fundamental que hace psible la clasificación de las cantidades. Una magnitud es una cantidad divisible *ad infinitum;* a esta característica definitoria se le llamó *continuidad*. Un número era una cantidad sólo divisible un número finito de veces; a esta característica definitoria se le llamó *discretez*. El *quantum*, como un elemento de la clase de las cantidades, era:

> [...] lo que es divisible en dos o más partes constitutivas, de las cuales cada una es por naturaleza un 'uno' y un 'esto'. Un 'quantum' es una pluralidad si es numerable, una magnitud si es medible. 'Pluralidad' significa lo que es divisible potencialmente en partes discretas; 'magnitud' lo que es divisible en partes continuas …la pluralidad limitada es número, la longitud limitada es una línea… (Aristóteles, *Metafísica*, 1020a, 5).

La siguiente cita ilustra por qué la geometría y la aritmética se hallaban desconectadas, excepto en el caso particular de las magnitudes conmensurables. En este caso, los resultados aritméticos se podrían aplicar, ya que estas magnitudes pueden ser tomadas como números:

> Los axiomas que son las premisas de una demostración pueden ser idénticas en dos o en más ciencias: pero en el caso de dos 'géneros' diferentes, tales como la aritmética y la geometría, no se pueden aplicar demostraciones aritméticas a las propiedades de magnitudes, a menos que las magnitudes en cuestión sean números (Aristóteles, *Analítica psterior* 75b, 5).

La palabra *género*, en esta cita, se refiere a clases de objetos que comparten ciertas características de "nacimiento" o generación y revela cómo las diferencias en la naturaleza o el origen de los objetos matemáticos determinaron el modo de operación con ellos. Aunque las proposiciones en las dos teorías son análogas y las reglas lógicas son las mismas, no se podrían aplicar indiscriminadamente a los objetos con una génesis diferente. Euclides mantuvo una separación entre la aritmética y la geometría, similar a la de Aristóteles (Jones, 1978, p. 377). Los Libros del I al VI y del XI al XIII de los *Elementos* son geométricos, mientras que los Libros que van del VII al IX son aritméticos. Con la excepción del Libro X, los términos *número* y *magnitud* nunca aparecen juntos en el mismo libro. La proposición X-5, sin embargo, hace uso de la autorización otorgada por Aristóteles de la siguiente manera:

> Las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón que un número tiene con un número.

Epistemología aristoteliana

Para Aristóteles, los conceptos tenían sus orígenes en el mundo físico, y heredaban sus propiedades y relaciones de la naturaleza. Para adquirir conocimiento, la naturaleza debería ser estrechamente observada y extraer de ésta los conceptos científicos. De la misma manera, el número y la magnitud fueron conceptos extraídos del mundo material, como podemos apreciarlo en la siguiente cita:

> Todas estas objeciones, entonces, así como otras del mismo tipo hacen evidente que el número y las magnitudes espaciales no pueden existir separadas de las cosas (Aristóteles, *Metafísica*, 1085b, 30).

Para los griegos, lo que se podía conocer representaba una realidad externa para el conocedor e independiente de él. (Piaget, 1950, capítulo III, sobre "Conocimiento matemático y realidad"). Esta posición epistemológica permitió la construcción de una estructura teórica y metodológica satisfactoria, pero impuso una serie de restricciones sobre los objetos matemáticos. Para nuestros propósitos, vamos a examinar las restricciones que se pueden detectar en los conceptos de número y magnitud, así como las relaciones entre ellos.

Número y magnitud

En los *Elementos,* el concepto de número estaba basado en las multiplicidades o colecciones de objetos concretos, individuales e indivisibles, cada uno de ellos identificado con una unidad abstracta:

> Una unidad es aquella que en virtud de la cual a cada una de las cosas que existen se le llama una.(*Los Elementos,* VII Def 2).

Estas definiciones, al igual que la definición de Aristóteles del quantum citada anteriormente, nos conduce a los conceptos de unidad y de número vinculados al proceso de contar como una actividad de las "lectura de números" en las cosas. El dominio numérico griego tenía una estructura básica derivada no sólo de cómo se generaba la sucesión de los números, sino también de las operaciones con sus elementos.

Una vez que se determinaba la naturaleza de los conceptos –como un reflejo de una realidad física y externa– se definía la metodología requerida para operar (manipular) estos conceptos. La unidad, el principio de generación de número, fue el concepto que resultó de extraer las características que se relacionaban exclusivamente con la singularidad de cada "cosa". De esta manera, desde el punto de vista griego, pensar en la división de la unidad era algo que no tenía sentido, ya que perdería su esencia; de la misma forma que una cosa (un hombre, un caballo) no se podrían dividir sin que perdieran su esencia. La imposibilidad de dividir la unidad señala la esencia de la cantidad discreta, como fue definida por Aristóteles. Las subdivisiones de una cantidad discreta no podrían ir más allá de la unidad y, como resultado de ello, solamente se podía subdividir un número finito de veces. Por otro lado, las magnitudes geométricas –el prototipo de las cantidades continuas– le dio forma a un dominio heterogéneo. La longitud, el área y el volumen pertenecían a este campo. Compartían la propiedad de ser divisibles, potencialmente *ad infinitum,* y, si pertenecían a la misma especie, se podrían establecer razones y proporciones entre ellos. No había ninguna estructura similar a la hallada en el campo numérico. Los segmentos de recta, por ejemplo, formaban un agregado de elementos abstractos, aislados e independientes entre sí. Dados dos segmentos, era posible operar con ellos, compararlos y ordenarlos, pero esto no quería decir que perdieran su individualidad. En la geometría griega, la línea recta era sólo un segmento que podía extenderse indefinidamente, pero no había ningún concepto análogo para nuestra "vida real" cotidiana.

La comparación entre magnitudes en términos de sus razones, que es el primer nivel cualitativo del proceso de medición, condujo a la noción de conmensurabilidad relativa (no absoluta). Sin embargo, esta no era todavía una clasificación –en el sentido de una relación de equivalencia– ya que sólo se tomaban dos elementos a la vez. La divisibilidad era la parte fundamental de la definición de conmensurabilidad e inconmensurabilidad. Si era posible hallar una magnitud finita que "midiera" simultáneamente dos magnitudes dadas, entonces se decía que estas dos magnitudes eran conmensurables. Si la búsqueda de esta "unidad-de-magnitud" nos llevara a tomar magnitudes más y más pequeñas en un proceso de división potencialmente infinito, se diría que las magnitudes eran inconmensurables. En el primer caso, las razones se comportaban de una manera similar a las razones numéricas y, como resultado, podrían ser tratadas como la segunda, de acuerdo con la proposición X-5 de los *Elementos.* Si este no fuera el caso, entonces no existiría ningún vínculo posible entre la magnitud y el número. Las matemáticas griegas consideraban la existencia de una unidad de magnitud, no sólo necesaria para la práctica de la medición, sino también teóricamente indispensable para la caracterización conmensurable-inconmensurable.

Según la epistemología realista griega, la unidad métrica no podía tener el estatus de "absoluta", como lo tenía la unidad aritmética, ya que la primera no tenía una realidad "externa". Seleccionar una unidad de magnitud sería el equivalente a dotar a la magnitud con atributos impuestos por el sujeto y no "leer" la realidad misma; de esta manera, la elección de una unidad de magnitud no era independiente de la actividad del sujeto. No obstante, la unidad de magnitud que resultaba de la comparación de dos magnitudes conmensurables era una unidad intrínseca a las dos magnitudes comparadas y, consecuentemente, independientes del sujeto que realizaba la comparación. Esta unidad tenía las características teóricas impuestas por las matemáticas griegas, pero también tenía el inconveniente de no siempre ser la misma, ya que variaba con el par de magnitudes comparadas.

Aceptando que la unidad aritmética y la unidad geométrica correspondían a diferentes "géneros", resumamos su comportamiento. La unidad aritmética no era un número; la unidad geométrica era una magnitud. La unidad aritmética era absoluta; la unidad geométrica dependía de las magnitudes que se estaban midiendo. La unidad aritmética generaba números; la unidad geométrica no generaba magnitudes. Las diferencias que hemos identificado entre los dos campos hacen imposible que se puedan identificar los números y las magnitudes en las matemáticas euclidianas, aun a nivel operacional.

Antes de entrar al estudio de Stevin sobre el número, debemos volver nuestra mirada a la noción de representación de los objetos matemáticos y al cómo organizamos localmente, primero, el conocimiento matemático.

Organizaciones locales: nociones y representaciones matemáticas

La historia del cálculo, en particular, señala que durante su desarrollo se van formando núcleos conceptuales que sirven para detonar la actividad matemática. A esos núcleos los llamaremos *organizaciones locales*. Veamos algunos ejemplos extraídos del cálculo diferencial; problemas de máximos y mínimos, en el contexto suministrado por la geometría analítica quedan identificados como problemas de trazado de tangentes en puntos especiales de una curva que, a su vez, puede ser representada mediante una ecuación algebraica. Tales representaciones analíticas ensancharon el universo de curvas a las que se les podía trazar una tangente.

Existe una relación muy fuerte entre representaciones *mentales y* representaciones *externas.* Aun más, las representaciones internas no pueden ser comunicadas sin el auxilio de las externas –el lenguaje natural, los diagramas, las ecuaciones etcétera. De allí que nuestro interés se centre en las representaciones externas ya que son sobre ellas que podemos apoyar nuestra actividad cognitiva. Esto es válido para todo concepto matemático. Las representaciones visuales de la geometría, por ejemplo, desempeñan este rol. Describamos a continuación la idea de organización local mediante un ejemplo tomado de la historia de las matemáticas: resolver problemas de optimización para funciones de una variable, usando el cálculo diferencial. Lo que se hacía, durante el siglo XVIII era partir de una organización local consistente de:

i) una curva representada por una ecuación
ii) un campo operativo que permite "derivar" la ecuación, e igualar a cero la "derivada".

Esta organización local está anclada al contexto que suministra la geometría analítica; generaliza el problema de trazado de una tangente y para ello recurre al uso de la *nueva representación* de los objetos geométricos que van a ser manipulados. De esta manera, mediante el campo operatorio, se va generando la noción de un "objeto tangente". En aquel momento no se tenía una definición formal de derivada, pero ello no fue obstáculo para iniciar la exploración que hemos descrito. Podemos pensar en una organización local como en una forma de estructura intermedia entre la fenomenología relativa a las tangentes y la definición formal del concepto.

Variación en un contexto geométrico

Vayamos ahora al trabajo de Oresme, *Tratado de configuraciones de cualidades y movimientos* (véase Clagget, 1968, para una excelente traducción al inglés). Ahí hallamos un importante ejemplo de organización local, a saber, el estudio de la variación en un contexto geométrico y, en particular, la idea de una *cantidad fluyente.* Oresme introdujo las figuras geométricas para representar el comportamiento de una *cualidad*. Según él, el estudio de un cuerpo se podía realizar desde dos puntos de vista: desde el *extensional* –por ejemplo, el peso del cuerpo– y desde una perspectiva *intencional* –por ejemplo, la temperatura del cuerpo. En el último caso, la medida se hacía punto-por-punto. En la lectura del capítulo "Sobre la continuidad de la intensidad" (Oresme, Part I. i, pp. 165-169), encontramos la concepción euclidiana de número, donde Oresme dice que cualquier cosa medible, *con excepción del número,* se puede representar a través de una magnitud; es decir "a manera de cantidad continua". Esto también explica por qué, cuando se habla de intensidades, él decía que "los puntos de una línea" eran una *ficción necesaria* utilizada para representar un lugar en el cuerpo estudiado. Cada una de las *mediciones intensionales* realizadas en un cuerpo fue representada por medio de un segmento. El cuerpo mismo se representaba mediante un segmento. Oresme consideraba al conjunto total de las intensidades como puerta de acceso hacia el estudio de la variación. A este conjunto se le llamó una *superficie lateral* y contenía toda la información acerca de la variación de la intensidad. Pero aquí aparece un cambio en su perspectiva ya que la latitud de superficies laterales fue usada para estudiar la variación de las *formas*, convirtiendo su trabajo en uno de carácter cualitativo.

Tomemos en consideración el estudio de velocidad de Oresme. Se pensaba en la velocidad como en una cualidad adquirida por un cuerpo en movimiento. Los términos "uniforme" y "uniformemente diforme" fueron introducidos para nombrar una cualidad que no cambiaba con el tiempo, en el primer caso, y una latitud variable con un índice constante de cambio, en el segundo caso. Oresme también consideró "deformemente diforme" para el caso de superficies laterales.

Aunque este procedimiento de clasificación fue, en general, independiente de las consideraciones físicas, la manera de Oresme para considerar la variación dotó a su modelo representacional con la capacidad de estudiar el movimiento geométricamente. Esta perspectiva también se encuentra en

Las dos nuevas ciencias de Galileo. Sin embargo, en este caso, el marco conceptual es muy diferente. Consideremos el Teorema I (Proposición I) de Galileo:

> El tiempo requerido para recorrer un espacio por un cuerpo que parte del reposo y que se desplaza con aceleración uniforme, es igual al tiempo en el que el mismo espacio sería recorrido por un cuerpo que se desplaza con velocidad uniforme (constante) y cuyo valor sea igual al promedio entre las velocidades máxima y mínima que alcanza el primer cuerpo (Galileo en *Struik,* 1969, pp. 208-209).

Una versión análoga de este teorema, conocida como la *Regla de Merton* puede ser hallada en *El tratado de las configuraciones de cualidades y movimientos* de Oresme. La fraseología aquí es la siguiente:

> Cada cualidad, si es uniformemente diforme, es de la misma cantidad que lo es una cualidad que es uniforme (constante) de acuerdo con elgrado del punto medio del mismo sujeto (Oresme 1350, Part III. VII, p. 409).

Pensamos que sería instructivo citar a Clagett sobre este asunto. Él dice:

> Sin embargo, (Oresme) no aplica la Regla de Merton sobre la equivalencia entre la medida de la velocidad con aceleración uniforme y la medida de la velocidad promedio descubierta en Oxford en la década de 1330, para el problema de la caída libre, como lo hizo Galileo casi trescientos años después, aunque Oresme, por supuesto, conocía el Teorema de Merton y, de hecho, proporcionó la primera prueba geométrica de esto en otro trabajo, el *De Configurationibus,* pero *aplicado éste a la aceleración uniforme en lo abstracto, más que hacerlo directamente a la aceleración natural de la caída de los cuerpos* (énfasis nuestro) (Clagett, *op. cit*., pp. 13-14).

Esto establece, de manera clara, que el marco conceptual dentro del cual trabajaba Galileo, no era el mismo que el de Orasme. Este último estaba interesado en el estudio *general* de las intensidades y las configuraciones, y el primero en el caso muy especial de la caída libre de los cuerpos.

Un nuevo concepto de número

En 1585 Simon Stevin publicó su libro *L' Arithmetique* (Stevin, 1585, en Girard [ed.], 1634), el cual produjo un cambio epistémico dentro del conocimiento matemático. Era un tratado acerca de los aspectos teóricos y prácticos de la aritmética. En el capítulo X, Stevin presentó su (nuevo) concepto de número. Para él, "número es aquel a través del cual los aspectos cuantitativos de cada cosa son revelados" (traducción nuestra).

En las matemáticas griegas, la categoría de cantidad había sido separada en clases disyuntas: lo discreto y lo continuo. Stevin no tomó en cuenta esta separación. El número, como una entidad aislada, era para él "continuo" en el sentido aristoteliano, ya que podía dividirse indefinidamente y, de cierta manera, heredaba las características de continuidad o discreción del objeto que se estaba cuantificando. Por ejemplo, al hacer referencia a *un caballo,* el número "uno" era discreto; no obstante, unido a *una yarda*, el número "uno" era continuo. Con esta formulación, los términos continuo y discreto dejaron de ser categorías ontológicas; ahora se volvían meramente propiedades contextuales de los objetos cuantificados. La notación decimal que Stevin introdujo podía resolver los problemas planteados por la tensión entre la forma y el contenido. De hecho, ya que no había una distinción dentro de esta categoría recientemente revisada de cantidad, no podía haber distinción entre el objeto de estudio de la aritmética y el de la geometría. El instrumento de representación requerido para hacer frente a esta nueva situación tenía que ser lo suficientemente flexible para ocuparse de estos problemas de cantidad discreta y, de manera simultánea, con los problemas de divisibilidad. Hablar acerca de las partes de unidad, de notación decimal, fue crucial. Esta representación estaba profundamente vinculada al nuevo concepto de número. Este es uno de los mejores ejemplos de cómo una adecuada representación simbólica se convierte en un instrumento con el cual se exploran los conceptos matemáticos.

Mientras que la matemática euclidiana producía un concepto de número por medio de una "abstracción empírica" –en el sentido de la epistemología genética de Piaget– el concepto de Stevin fue el resultado de la "abstracción reflexiva". Stevin construyó su concepto de número a partir de la generalización de la práctica de medición. Aquí, la frontera entre las matemáticas teóricas y las matemáticas aplicadas se desvanecía y se hacían presentes los requerimientos prácticos para determinar el tipo de matemáticas que deberían ser desarrolladas. Stevin nos dice Klein,

> pone su experiencia de ingeniería financiera, comercial y "práctica" al servicio de su preocupación "teórica"– así como, recíprocamente, su "teoría" está dispuesta para ser usada en su "actividad práctica" (Klein, 1968, p. 186).

Stevin elaboró el aspecto operacional en un trabajo titulado *La Disme*, publicado poco antes que *L'Aritmetique.* En ese trabajo presentó una sistematización, con algunas innovaciones de la notación decimal, ya conocidas para ese tiempo, pero aún lejos de estar en uso general. Agregó los problemas aritméticos en *L'Aritmetique*. Allí identificó la magnitud y el número, atribuyendo las propiedades numéricas a las cantidades continuas y la continuidad a los números. De aquí en adelante, no era posible para los matemáticos separar el concepto de cantidad de su nueva representación simbólica. Esto debería dejar en claro la naturaleza más abstracta del nuevo concepto de número. De hecho, resulta interesante comparar una vez más el concepto griego de número en el que la unidad es el principio fundamental, el mismo que introdujo Stevin.

Nosotros interpretamos el proceso de abstracción reflexiva que llevó a Stevin a su concepto de número como un proceso, por medio del cual las (simbolizaciones de) operaciones aritméticas "revelaron" –en el sentido que Stevin dio a su palabra en su definición de número– las acciones o transformaciones que se realizaron sobre los objetos materiales, en tanto que estos objetos se pudieran tomar como cantidades. Para Stevin, el número revelaba la cantidad de cada cosa. Por lo tanto, las operaciones aritméticas se sostenían a través de las transformaciones que se realizaban en las cantidades.

Un paso muy importante hacia la ampliación del dominio numérico era el de considerar que los resultados de las operaciones aritméticas, hechas con los números, fueran números. Stevin estableció este punto de varias maneras. Por ejemplo, el siguiente argumento fue usado repetidamente por Stevin, y como consecuencia fue severamente criticado en ese tiempo. Con respecto a este asunto, encontramos primero en qué parte Stevin afirmaba que la unidad era un número:

> La parte es “del mismo material” que el todo. La unidad es una parte de una multitud de unidades. Por lo tanto, la unidad es “del mismo material”, así como la multitud de unidades; pero el material de una multitud de unidades es número. Por esta razón, el material de la unidad es número (Stevin 1585, p. 1).

Este argumento presentó una ambivalencia notable, considerando su nivel de abstracción. La primera premisa, “la parte es de la misma materia que el todo”, aquélla se refiere a los objetos materiales, mientras que la segunda, “la unidad es parte de la multitud de unidades”, se refiere a los objetos matemáticos y, por ello, abstractos. El paso sin restricción de un nivel a otro mostró el apuntalamiento normativo que la realidad física dio al concepto de número de Stevin. Él sostuvo su concepto de número con base en las operaciones aritméticas que se podían realizar con él, y las operaciones mismas sobre las transformaciones que se podían hacer sobre la materia (al grado de que se pudiera cuantificar). Estas transformaciones cuyos resultados no alteraban la cantidad total de la materia que intervenía en el proceso, se reflejaban como operaciones, caracterizando, a la vez, el cierre del dominio matemático.

La elección de la unidad

La divisibilidad de la unidad tiene sus raíces en el contexto de los procesos de medición, a través de los cuales un número se halla asociado a una magnitud. Stevin propuso una estructura teórica basada en la sistematización de esta práctica. Sugirió la popularización del uso de las subdivisiones decimales:

> [...] todas las mediciones serán divididas, ya sean mediciones de longitud, de líquidos, de cosas secas, de dinero, etc., a través de las progresiones precedentes de las décimas y cada una de estas famosas especies se le llamará Principio; por ejemplo, la Marca, Principio de pesos, por medio del cual el oro y la plata son pesados, la Libra, Principio de otros pesos comunes; la Libra Flamenca, la Libra Esterlina de Inglaterra, el Ducado español, etc., y así, con cada Principio de monedas (Stevin, en *La Disme*, 1585, p. 221).

Stevin llamó a cada una de las unidades de medición *Principio* (comienzo), independientemente de su naturaleza o extensión. Él asoció la unidad numérica con este *Principio.* Durante toda *La Disme*, Stevin mostró claramente cómo estableció la equivalencia entre cada uno de estos elementos de las unidades métricas con una sola unidad numérica natural por medio de la práctica de medición. De esta manera, la unidad de Stevin no sólo fue el resultado de una abstracción de objetos como cantidades, sino principalmente de una abstracción de las acciones coordinadas que se realizaban en el proceso de medida de estos objetos. Este último argumento muestra por qué su concepto de número fue el resultado de un proceso de abstracción reflexiva.

Es pertinente hacer ahora algunos comentarios sobre las expansiones decimales. Stevin no negó la existencia teórica de las expansiones decimales infinitas. En realidad, él sugirió un método por medio del algoritmo de la división para aproximar, tanto como queramos, un decimal infinito (*La Disme* en Stevin, 1585, p. 210). Sin embargo, había un interés predominante para aquellos objetos que se podían obtener (construir) por medio de operaciones aritméticas. La siguiente cita, que se refiere a las magnitudes inconmensurables, describe la posición epistemológica de Stevin:

> no podemos saber la inconmensurabilidad de dos magnitudes dadas a través de esta experiencia; en primer lugar, debido a los errores de nuestros ojos y manos (que no pueden ver o dividir de manera perfecta). Finalmente, concluiríamos que todas las magnitudes, tanto las conmensurables como las inconmensurables, son conmensurables. Y, en segundo lugar, aunque fuera posible para nosotros substraer la cantidad más pequeña de la mayor cientos de miles de veces y continuar de esta manera por cientos de miles de años (si los números dados fueran inconmensurables), trabajaríamos eternamente, quedándonos en la ignorancia de lo que finalmente podríamos encontrar. Por lo tanto, esta forma de cognición no es legítima; nos coloca en una posición de imposibilidad si deseáramos expresar en qué consiste realmente la naturaleza (Stevin, p. 215).

Ahora volvemos al estudio de algunos aspectos de la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

Viète y el arte analítico

La última cita muestra la importancia de la operación aritmética en las concepciones de Stevin. En el trabajo de Stevin, el concepto de número se halla justificado, no sólo porque podría acomodar todos los cálculos requeridos, sino también porque el carácter simbólico de su trabajo estaba en línea con el desarrollo del álgebra. Stevin hablaba acerca de los "números aritméticos" y también sobre los "números geométricos". Según él, si el valor numérico de un número geométrico era desconocido, ingresaba a las computaciones algebraicas como una *cantidad indeterminada*. Esta no era todavía una genuina variable algebraica, en tanto que Stevin requiriera de la homogeneidad de las cantidades implicadas. Es decir, dos cantidades geométricas se podían sumar sólo si ambas pertenecían a la misma categoría: la longitud, el área o el volumen. Aun más, esta cantidad indeterminada *era un número*, aunque fuera desconocida para nosotros.

Los conceptos algebraicos experimentaron un desarrollo muy sutil a principios del siglo diecisiete. Esta primera concepción de álgebra fue como una especie de aritmética generalizada. Otra perspectiva se presentó en el *Artem Analyticem Isagoge* de Viète (1591) (el Apéndice en Klein 1968 es una traducción inglesa de la obra de Viète: *Introducción al arte analítico*). En este libro, una de las piedras angulares del nuevo pensamiento algebraico, leemos:

> La ley suprema y eterna de las ecuaciones o proporciones, a la cual se le llama la ley de homogeneidad porque se halla concebida con respecto a las magnitudes homogéneas, es ésta: I. Solamente las magnitudes homogéneas van a compararse entre sí. Porque es imposible saber cómo magnitudes heterogéneas puede ser comparadas entre sí. Y de esta manera, si una magnitud es sumada a una magnitud, es que son homogéneas. Si una magnitud es multiplicada por una magnitud, el producto es heterogéneo con respecto a cada una de ellas (Viète 1591, cap. III, p. 324).

En la obra de Viète, el término "magnitud" fue usado en un sentido general, no sólo geométricamente. La magnitud que uno buscaba para resolver una ecuación, por ejemplo, podía ser un número. A este respecto, citamos a J. Klein:

> Lo que es característico de esta 'magnitud general' es su indeterminación, de la cual, como tal, un concepto se puede formar solamente den-

> tro del campo de un procedimiento simbólico… (la presentación euclidiana) no realiza dos cosas que constituyen la parte central del procedimiento simbólico: no identifica al objeto representado con sus representaciones, y no remplaza la determinación real de un objeto con una posibilidad de hacerlo determinado, tal como se expresaría a través de un signo, el cual en lugar de ilustrar un objeto determinado, significaría determinación posible (Klein, 1968, p. 123).

Este fue un gran paso hacia la constitución de una matemática simbólica; sin embargo, Viète aún requería de la ley de homogeneidad. Además, el carácter simbólico de su trabajo fue (como en el caso de Stevin) el resultado de un proceso de abstracción reflexiva. En cierto sentido, los conceptos de la "nueva ciencia" se obtuvieron por medio de una reflexión sobre el contexto total de ese concepto o, en otras palabras, a través de un proceso que podemos llamar "*abstracción generadora de símbolos*". La obra de Viète se puede ver como el primer trabajo de esta nueva disciplina.

En su libro *Reglas para la dirección de la mente* (Descartes, 1628, en Kolak 1994), Descartes considera el problema de multiplicar el producto *ab* de las magnitudes *a* y *b* por una tercera magnitud *c*. Él dice en la Regla XVIII, que para que esto sea posible, "debemos concebir (el producto) *ab* ***como una línea***" (Descartes, p. 81).

Este divorcio de las cantidades de la restricción geométrica de la homogeneidad, era posible debido al simbolismo abstracto resultante. Las cantidades involucradas en la actividad operacional fueron las abstracciones de las figuras geométricas, no de las figuras mismas. La identificación de un número con el símbolo usado para representarlo llevó a una conceptualización de número como una entidad mental, ya no más como el *arithmos* griego usado para contar objetos materiales. De esta manera, el álgebra simbólica de Viète, que aún era aritmética y geométrica, se tornó plenamente simbólica en las manos de Descartes a través de la pérdida de la dimensionalidad de los símbolos usados. Antes de Viète, la actividad principal era la búsqueda de una fórmula (un procedimiento) para calcular las raíces de una ecuación con coeficientes numéricos. Esta actividad se puede ver como una aritmética generalizada. Todas las operaciones implicadas eran desempeñadas sobre los coeficientes numéricos, y, eventualmente, la incógnita también llegó a estar involucrada en las operaciones. Con el trabajo de Viète esto cambió radicalmente. Ahora, la *operación* era el nuevo objeto de estudio. En términos de la epistemología genética, hemos entrado a una etapa *ínter-objetal* de desarrollo (Piaget y García 1989, pp. 142-143). Como ya hemos señalado, el paso hacia esta nueva etapa era posible porque un proceso de abstracción reflexiva había tenido lugar.

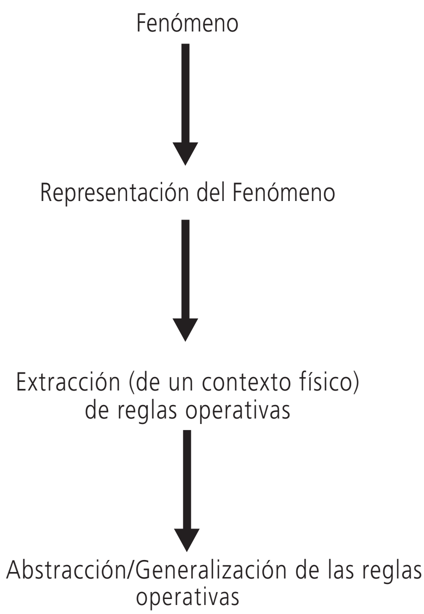
Variable y variación

El lenguaje simbólico del álgebra permitió la construcción de modelos en un nivel más alto de representación. Dentro de este campo operacional, los símbolos se podían manipular como cantidades dadas y se relacionaban a través de expresiones simbólicas. Esto fue crucial para el estudio consciente de las funciones como modelos. La *tabla de valores* es un buen ejemplo de este tipo de modelo. Quizás lo que es más importante en este contexto es el uso de símbolos literales como objetos, con la capacidad de tomar valores numéricos y, de este modo, *variar* sobre un sustrato numérico.

Cuando la geometría analítica fue creada, se estableció la posibilidad de moverse, de una representación simbólica (la ecuación algebraica) a una visual (la gráfica). La interacción entre estas dos formas de representación condujo a la construcción de significados más profundos para las concepciones implicadas. Las conexiones controlaban el significado; así, en el encuentro entre las concepciones simbólica/algebraica y visual/geométrica, el nuevo espacio para hacer geometría –el plano cartesiano– transformó el estudio geométrico de movimiento, previamente adelantado por Oresme y los escolásticos, quienes habían iniciado un estudio serio del movimiento con representaciones no-cartesianas. Sin embargo, fue la nueva concepción de espacio –un espacio geometrizado– la que resultó ser crucial para el desarrollo del cálculo infinitesimal.

Hagamos notar la conexión entre el desarrollo del lenguaje algebraico y el estudio del movimiento en el contexto geométrico. En la Regla de Merton era importante que la *distancia* recorrida por un cuerpo estuviera representada como un *área*. Existe un vínculo entre este hecho y la Regla XVIII de Descartes que identificaba *todas* las magnitudes con los segmentos de línea. La ley de homogeneidad de Viète permanece entre estas dos perspectivas y refleja un periodo anterior del desarrollo algebraico. La ley de homogeneidad fue un obstáculo para el desarrollo del lenguaje algebraico. Descartes lo superó a través de la linearización de las magnitudes. En un sentido, al colocar todas las magnitudes en la misma categoría hizo posible el surgimiento de los modelos geométrico-dinámico en el cálculo elemental.

Podemos resumir este desarrollo en el diagrama siguiente:



El plano cartesiano complementado por el campo operacional de la nueva álgebra “sin-dimensiones”, proporcionó los instrumentos representacionales necesarios que permitieron la construcción de modelos para el estudio de la variación.

Conclusiones finales

Las ideas matemáticas que han sido estudiadas es este artículo constituyen una de las piedras angulares del cálculo, tal como se desarrolló durante la segunda mitad del siglo diecisiete, principalmente por parte de Newton y Leibniz. Esta era matemática, caracterizada por el estudio de la variación, se hizo posible sólo dentro de un marco de trabajo conceptual que incluía:

1) Un concepto unificado de número capaz de ocuparse de las cantidades discretas y de las magnitudes continuas.
2) Una forma de representación geométrica que permitía considerar a las cantidades variables como magnitudes (geométricas) y, de esta manera, como infinitamente divisibles.
3) Un nuevo lenguaje algebraico que enfatizaba el estudio de los procesos matemáticos.
4) Una organización local de nociones y concepciones que servía de sustento al desarrollo de la actividad matemática posibilitando la emergencia de nuevos conceptos y transformaciones.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2000). “An epistemological history of number and variation”, en Victor Katz (ed.) *Using History to Teach Mathematics An International Perspective*. Mathematical Association of America.
Traducción: Juan Carlos García Palmeros, DIE-Cinvestav.

Analizando las creencias y las prácticas de una maestra de biología en una escuela de educación superior de México

Resumen: Este artículo explora las creencias y prácticas de una maestra de biología a través de tres marcos de trabajo teóricos interrelacionados: conocimiento común, aprendizaje colaborativo y comunidades de práctica. Los datos fueron obtenidos de un estudio de caso a fondo de María, una maestra de biología de una escuela de nivel superior pública mexicana, quien se hallaba participando en un proyecto internacional de ciencia de cuatro años, haciendo uso del aprendizaje colaborativo y de la tecnología de comunicación e información. Sus creencias y prácticas fueron examinadas por medio de cuestionarios, de entrevistas semi-estructuradas y de observaciones de clases sin participación oral. A través del uso del marco de trabajo de los tres componentes, los grados de coherencia entre la práctica y las creencias que guían la conducta cotidiana de la maestra se hicieron patentes, así como las dificultades en la incorporación de innovaciones debido a las restricciones institucionales (2005 Wiley Periodicals, Inc. J Res Sci Teach 42: 465-491).

La investigación durante la década pasada se ha centrado en la necesidad de estudiar las creencias de los maestros para comprender sus prácticas de enseñanza, así como en saber cómo desarrollan su propio conocimiento profesional (Calderhead, 1996; Good, 1996; Luft, Roehrig y Patterson, 2003; Richardson, 1996; Ritchie y Rigano, 2002). Las creencias de los maestros acerca de la enseñanza y del proceso de aprendizaje son significativos al determinar la naturaleza su prácticas en el salón de clase y que afectan muchos aspectos de su trabajo profesional, incluidas la planeación de clases, la valoración y la evaluación (Bryan y Atwater, 2002; Hewson y Hewson, 1988).

Las creencias son definidas como las construcciones cognitivas personales, aceptadas como ciertas por los individuos que las mantienen (Richardson, 1996), con raíces episódicas que se basan en las experiencias personales (Bryan y Atwater, 2002), mientras que las acciones o las prácticas son consideradas como conocer-en-la-acción (Shön, 1983) o conducta pedagógica observable (Fishbein y Ajzen, 1975; Good, 1996). Las creencias están formadas por sistemas de creencia o por grupos estructurados de creencias con algo que es más central y más difícil al cambio que otros (Bryan y Atwater, 2002; Fishbein y Ajzen, 1975). Algunas pueden ser explícitas, pero hay muchas implícitas que los maestros no pueden o no desean expresar, pero todas son altamente personales y, en un contexto específico, sirven para filtrar e interpretar los nuevos fenómenos (Pajares, 1992).

Se piensa que las creencias y las prácticas de enseñanza tienen una relación interactiva con actitudes y creencias que transmiten fuerza a las acciones de una persona (Bryan y Atwater, 2002; Richardson, 1996). Las perspectivas de los maestros de la naturaleza de la ciencia (NOS, siglas en inglés) son de interés particular para la enseñanza de la ciencia, pero son difíciles de identificar, en gran parte porque se ha encontrado que están constantemente cambiando y modificándose, de manera muy dependiente, en su contexto (Nott & Wellington, 1996). Hay evidencia de que ciertas posiciones epistemológicas tienden a dirigir las estrategias de enseñanza específicas: por ejemplo, una perspectiva positivista del conocimiento científico conduce a una fuerte dominación verbal dentro del aula (Richardson, 1996: 107). No obstante, la relación de estas creencias con la enseñanza en el aula por un maestro no es ni directa ni sencilla (Abd-El-Khalick, Bell y Lederman, 1997; Lederman, 1999). También se piensa que las creencias son predicciones válidas de práctica subsecuente, así como precursoras del cambio (Haney, Lumpe y Czerniak, 2002; Jongmans, Biemans, Sleegers y de Jong, 1998; Nespor, 1987).

Para obtener una visión más amplia de estos dominios personales y prácticos, resulta esencial incluir el medio social y cultural en el que trabajan los maestros, los contextos institucionales, culturales e históricos particulares (Cole y Engestrom, 1993; Littleton, 2000) o, dicho de otra manera, adoptar una aproximación ecológica (Crook, 2000). Un contexto escolar legitimiza cierto conocimiento y conducta (Littleton, 2000), creando la implementación de estrategias innovadoras o de contenido diferente, en algunos casos, lo que viene a ser una tarea difícil o, incluso, un riesgo profesional para el maestro. Cada dimensión de tiempo, localización o grupo también tendrá sus propias características de definición que afectará y posiblemente hará que las elecciones de estrategias, las conductas y las actitudes de los maestros sean obligatorias, las cuales pueden evolucionar con el tiempo. Al seguir el trabajo de los docentes en diferentes momentos, durante el tiempo que están trabajando con grupos diversos de estudiantes y en distintas situaciones, es posible desarrollar una visión comparativamente holística de sus prácticas y de sus creencias pedagógicas fundamentales, mediadas por su contexto específico.

Las investigaciones recientes sobre las creencias y las acciones de los maestros se han concentrado, en gran medida, en los profesores que se hallan en el proceso de formación o de desarrollo profesional (Bryan y Atwater, 2002; Haney *et al.*, 2002; Luft *et al.,* 2003; Yerrick, Parke y Nugent, 1997). Otra parte de la investigación se ha centrado en la conducta cotidiana dentro del aula y en las creencias subyacentes de los maestros (Feldman, 2002; Ritchie y Rigano, 2002; Rop, 2002; Tobin y McRobbie, 1997). Aunque sus metas y enfoques han variado considerablemente, todos estos trabajos coincidieron en el reconocimiento de la complejidad de las interacciones del maestro con los estudiantes, dentro de su contexto. Estos autores también enfatizaron la importancia de considerar las creencias iniciales de los docentes con respecto a su selección de las estrategias de enseñanza dentro del aula y la posibilidad de incorporar innovaciones o reformas.

En México, la investigación de la educación referente a la ciencia es muy reciente, de modo que, relativamente, hay muy poca información de lo que actualmente ocurre en las clases de ciencias naturales, y aun se tienen menos detalles sobre las creencias y prácticas específicas de los maestros de esta asignatura. En 2003, un estudio mexicano de investigación a nivel nacional en la educación de las ciencias naturales, hizo una revisión de la década de 1992 a 2002 (López y Mota, 2003). Dentro de este periodo, los autores sólo hallaron 104 publicaciones científicas, incluyendo a ambas, nacionales y extranjeras, que cubrían todos los niveles de la educación, desde primaria hasta universidad. Estos estudios se ocupan de diversas áreas, tales como las preconcepciones de los estudiantes, el cambio conceptual, el currículum como estructura y proceso, la evaluación, el análisis de los libros de texto en uso, la enseñanza de la historia de la ciencia y el análisis del discurso, entre otros, pero ninguno focalizado, de manera específica, sobre los ambientes de aprendizaje de las ciencias, ya sea en las escuelas o en los salones de clase. En términos del análisis del discurso con respecto a la educación de las ciencias en México, los estudios más notables de la década pasada se refieren a una serie de investigaciones realizadas por Candela entre 1991 y 2001 (citado en López y Mota, 2003, pp. 431-438). Candela ha publicado numerosos artículos sobre la enseñanza de la ciencia en la escuela primaria (grados 1-6), sobre la dinámica de la interacción social a través del análisis del discurso de la ciencia en la escuela. Sus resultados han destacado las características de la construcción social, del conocimiento científico de la escuela y de los factores socioculturales que influyen su construcción.

Otras investigaciones recientes indican el predominio continuo del modelo de transmisión de enseñanza –centrado en el maestro– en las clases escolares de la secundaria mexicana (grados 7-9) (Quiroz, 2000), y en las escuelas superiores técnicas de agricultura (10-12) en uno de los estados de México (Mendoza, 2003). Flores, López, Gallegos y Barojas (2000) han iniciado en México, de manera efectiva, el estudio de las concepciones científicas de los maestros de ciencias naturales y sus creencias con respecto a los NOS y al aprendizaje. Ellos describen la enseñanza de la física en la escuela secundaria, en general, como muy tradicional.[1] Al ini-

[1] Entendemos "tradicional" como el modelo pedagógico centrado en la transmisión del conocimiento del maestro al estudiante como un recipiente pasivo.

cio de un programa de formación en servicio, con un grupo de 12 maestros de física a nivel secundaria, estos investigadores identificaron las concepciones epistemológicas de los maestros como empiristas y sus concepciones de aprendizaje como conductistas.

El análisis después del curso indicó cambios hacia el positivismo lógico y posiciones cognitivistas, consideradas por los autores como etapas intermedias hacia el constructivismo. Sin embargo, en su estudio, ellos no acompañaron a los maestros a sus salones para observar sus prácticas cotidianas.

Todos estos investigadores acentuaron la necesidad de incrementar y mejorar las diferentes áreas de investigación en la enseñanza de las ciencias naturales en México, particularmente, en relación con las prácticas del salón de clase (López y Mota, 2003). De este modo, consideramos muy relevante contribuir a la construcción de un perfil ricamente detallado de los maestros de ciencias naturales de las escuelas secundarias mexicanas, a través de nuestro estudio exploratorio de las creencias y prácticas de una maestra específica. Los resultados también se sumarán al desarrollo de una descripción comprensiva de diferentes ambientes de aprendizaje de las ciencias naturales en las escuelas mexicanas. Este artículo presenta un caso de estudio profundo y longitudinal de María, una maestra de biología de una escuela superior pública mexicana. Los datos fueron obtenidos usando una gran cantidad de medidas cualitativas para explorar sus creencias y prácticas, una variación de etnometodología contemporánea dirigida hacia el análisis del discurso (Adler y Adler, 1998). La premisa básica de este trabajo es que el salón de clases de cada maestro constituye una comunidad de práctica, la cual se define institucionalmente con metas muy específicas. El análisis del discurso de las interacciones del salón y de las entrevistas de la maestra estuvo basado consecuentemente en el marco de trabajo teórico de las comunidades de práctica (Wenger, 1998, 2002). Como las comunidades de práctica involucran necesariamente la construcción de trabajo colaborativo, desde una base de conocimiento común, el análisis del discurso también implicaba el uso de categorías de los modelos de apoyo del conocimiento común (Edgard y Mercer, 1987; Edgard, 1993; Crook, 2000), y del aprendizaje colaborativo (Henri y Lundgren-Cayrol, 1998; Joiner, Thompson, Faulkner, Littleton & Miell, 2000).

Un aspecto importante del contexto de este estudio es que la escuela superior de María ha estado participando en un proyecto de ciencia internacional de cuatro años: TACTICS,[2] iniciado en el 2000 entre estudiantes (16-18 años de edad) en cuatro escuelas mexicanas y en dos canadienses. El proyecto TACTICS implica el uso de aprendizaje colaborativo, tanto cara a cara dentro de cada escuela como a través de internet entre las escuelas, con el propósito de investigar los temas específicos de la ciencia. Los objetivos de nuestra investigación fueron varios: *a)* describir las creencias expresadas por María concernientes a la enseñanza y aprendizaje de las ciencias naturales; *b)* observar y describir sus prácticas cotidianas en el aula; *c)* comparar y contrastar los datos para ilustrar los grados de coherencia entre sus creencias expresadas y las prácticas; *d)* detectar cualquier transformación que ocurra durante el periodo del estudio, con un interés particular en las transferencias posibles de las estrategias usadas en TACTICS, tales como el aprendizaje colaborativo, una técnica que María nunca había usado antes; y finalmente, intentar la identificación de factores en el escenario institucional que pudieran promover o impedir el cambio en las creencias y prácticas de una maestra (Shön, 1991).

La maestra y su contexto

María es una maestra de biología en una población rural agricultora, localizada en un estado central de México. Al inicio del proyecto, ella tenía 45 años de edad, y ha enseñado durante 18 años en la misma escuela superior pública (grados 10-12), la cual está incorporada, dentro del estado, a la universidad.[3]

[2] TACTICS (www.cinvestav.mx/tactics) son las siglas en español y francés que designan el trabajo colaborativo y el aprendizaje en la ciencia, usando la tecnología de la información y de las comunicaciones. Para más detalles sobre el proyecto TACTICS, ver Vásquez-Abad, Brousseau, Waldegg, Vezina, Martínez, Paul de Verjovsky (2004).

[3] Cada escuela superior en México está incorporada a un sistema educativo superior que determina el currículum, incluyendo los planes de estudio específicos para cada materia, así como los aspectos normativos y políticos de la educación, tales como el nombramiento del director cada tres años, los contratos de los maestros, el sistema de evaluación.

El plan oficial de estudio para biología es determinado por la academia de profesores de biología, una asociación de maestros de esta materia de todas las escuelas superiores incorporadas, pero con una fuerte inversión por parte de los maestros de biología de la universidad. El contenido de este plan de estudio es enciclopédico, compuesto por una larga lista de terminología y conceptos biológicos. Los estudiantes son evaluados cada semestre por un examen estandarizado, el cual es diseñado por la misma academia de profesores de biología. El examen consiste en preguntas de elección sobre una terminología y conceptos descontextualizados, esencialmente una reificación del plan de estudio, todo esto en niveles cognitivos inferiores de identificación y de comprensión básica.

Esta escuela superior particular tiene aproximadamente mil 200 estudiantes en el turno matutino, de 7 am a 1 pm (también hay uno vespertino con unos 800 alumnos), principalmente de la misma población. De acuerdo con los maestros y el director, la mayor parte de los estudiantes tienen perfiles que pertenecen a familias de la clase media baja. El sitio es muy agradable. Hay patios abiertos que separan las diferentes construcciones de dos pisos de la escuela, y en cada uno hay árboles, plantas florecientes y bancas para los estudiantes. Un gran laboratorio de cómputo con aire acondicionado, con conexiones de internet, es usado todo el tiempo para enseñarles a los estudiantes las habilidades básicas de la computación. También hay una pequeña biblioteca con algunos libros y largas mesas para que los estudiantes trabajen. Además, hay canchas de basquetbol, una de futbol y una cafetería externa.

Los salones están muy sencillamente amueblados; un escritorio sobre una pequeña plataforma, un pizarrón blanco y las sillas individuales de los estudiantes, cada una con su tabla para escribir. No hay trabajos de los alumnos ni adornos en las paredes. Como el clima es muy caliente, cada salón tiene enladrillado abierto y un ventilador en el techo para refrescar el lugar; sin embargo, esto también provoca ruido en diferentes áreas de la escuela. El laboratorio que María usa para sus grupos tiene luz y es espacioso. Hay ocho bancas de laboratorio, para más de ocho estudiantes cada una; todas están equipadas con agua, gas y con conexiones eléctricas. En contraste con los salones, en las paredes hay trabajos hechos por los estudiantes, colecciones de biología y esquemas. Hay plantas al lado de una banca. Los laboratorios se usan de manera irregular, dependiendo de cada maestro, con ejercicios que tienden a ser muy prescriptivos, como de receta.

María usualmente trabaja 20 horas a la semana, dando clases de biología a grupos que van de 30 a 40 estudiantes (entre 15 y 19 años de edad), y también como técnica[4] académica en los laboratorios de la escuela. Ella además es miembro activo de la academia de profesores de biología y de la unión de maestros. Cada curso de biología consiste en tres clases por semana de 50 minutos, durante un semestre. Muy pocos estudiantes tienen libro de texto, por lo que los maestros tienen que proporcionar la información de acuerdo con sus propios criterios. Los maestros son virtualmente autónomos en sus prácticas en los salones, ya que hay poca o casi nada de supervisión que no sea la de revisar su asistencia, así como los planes de enseñanza muy generales que cada uno entrega al inicio de cada semestre.

A María se le invitó a unirse al proyecto TACTICS en 2000 y desde ese tiempo ha trabajado con un grupo nuevo de estudiantes cada año, principalmente revisando sus progresos y supervisando su asistencia en las sesiones de trabajo. Los autores de este artículo, investigadores en el proyecto TACTICS, invitaron primero a María a colaborar en TACTICS y más adelante en este estudio específico. En ese tiempo, María era una maestra en servicio y estaba en el segundo año de un programa de maestría en la Enseñanza de las Ciencias Naturales (MEC),[5] bajo la coordinación del primero de los autores de este artículo. Se desarrolló una buena relación entre los dos durante la MEC, lo cual fue de considerable importancia para la actual investigación (Taylor y Bogdan, 1990). El programa de maestría fue la primera formación para maestros formal que tomó María, ya que

[4] Ella prepara los materiales para el trabajo de práctica de otros maestros de ciencias.
[5] MEC significa "Maestría en Enseñanza de las Ciencias."

había comenzado su carrera de enseñanza en biología con el grado de bachillerato de la universidad estatal.[6] Ya había tomado, previamente, varios cursos de diplomado ofrecidos por la universidad, principalmente centrados en el conocimiento del contenido de la biología actual. A través de este desarrollo profesional, voluntario, no remunerado, María se ha mostrado personalmente motivada para mejorar como maestra.

Marco de trabajo teórico

Para realizar el análisis de datos, definimos las categorías basándonos en el marco de trabajo teórico del conocimiento común (Edwards y Mercer, 1987; Edwards, 1993; Crook, 2000), en el aprendizaje colaborativo (Henri y Lundgren-Cayrol, 1998; Joiner *et al*., 2000) y en las comunidades de práctica (Wenger, 1998, 2002). Los dos últimos modelos conceptuales fueron tomados al principio, cuando estos autores formaron la base teórica de TACTICS, el punto inicial y original de este estudio. Una hipótesis inicial era que podría haber evidencia de cierta transferencia de las experiencias de la maestra en el proyecto TACTICS a sus prácticas cotidianas en el salón de clase. Al usar este marco de trabajo teórico, nuestro propósito era identificar los niveles diferentes de la práctica cotidiana de María de las tres perspectivas distintas, pero interrelacionadas, junto con la identificación del paso específico en su discurso, que daba evidencia de las relaciones entre estas prácticas cotidianas y sus creencias expresadas, mediadas por su contexto de trabajo. Las creencias mismas eran inferidas de sus respuestas en los cuestionarios, así como las expresadas en las entrevistas y en el discurso de las clases. Surge un esquema explicatorio comprensivo cuando consideramos la intersección de los tres ejes teóricos.

[6] En México, la mayor parte de los maestros de escuelas superiores sólo tienen un grado profesional, puesto que no se les pide que tengan títulos de enseñanza.

Conocimiento común

Edwards y Mercer (1987) consideraban que la educación era un proceso público con base en el desarrollo del conocimiento común o compartido, así como de las perspectivas compartidas, dentro de un contexto sociocultural particular. Crook (2000) ejemplificó cómo la comprensión compartida o el conocimiento común entre las personas, tales como la comprensión de un programa de software particular, podía volverse un recurso para realizar una actividad compartida, aun cuando se pudiera adquirir de manera particular y, de esta manera, dentro de los aspectos afectivos, la colaboración motivada. Maestros y estudiantes pueden desarrollar un conocimiento común a través de la enseñanza tradicional, aun cuando no se discuta ni se cuestione la aceptación y comprensión, por parte de los estudiantes, de lo que el maestro "conoce" como el producto final. En estos casos, no hay ni discusión explícita de las metas u objetivos comunes del currículum ni incorporación de las experiencias e intereses de los estudiantes (Edwards y Mercer, 1987).

El estudio del discurso en el salón de clase es un excelente indicador del rol del maestro. En una situación tradicional, el maestro se halla típicamente en el centro del diálogo, controlando casi todo el intercambio verbal, peculiarmente, con el uso extensivo de las interacciones del diálogo triádico (Lemke, 1997; Resta, Cristal, Ferneding y Kennedy Puthoff, 1999; Wells, 1999). Resta *et al*. (1999) sugirieron que era necesario estudiar esta estructura si es que tiene que haber un cambio en la educación, desde el modelo didáctico a uno más constructivista, mientras que Lemke (1997) enfatizó su significado en la enseñanza de las ciencias y en los procesos de aprendizaje.

Nuestro estudio no se basa en un análisis del discurso en el sentido lingüista; más bien se halla situado en el campo de la psicología discursiva, una observación pragmática de las interacciones verbales y de las reglas básicas del discurso educacional (Edwards, 1993). Las categorías escogidas para la identificación y análisis del conocimiento común, en términos de las observaciones referidas, incluían participación activa, cuestionamiento, reglas básicas del discurso y la enseñanza del contenido, considerada cada una como un aspecto esencial para la construcción exitosa del conocimiento común.

Aprendizaje colaborativo

Henri y Lundgren-Cayrol (1998) se centraron en la dinámica cognitiva del aprendizaje colaborativo que involucraba a tres actores o polos de interacción: el estudiante, el grupo y el conocimiento del experto. La interacción entre estos tres polos no es ni lineal ni secuencial, sino que están, de manera iterativa, involucradas en tres fases de desarrollo del trabajo colaborativo: la exploración (que incluye el compromiso social y cognitivo), la elaboración (negociación, enriquecimiento y validación, que requieren interdependencia positiva para la colaboración) y la evaluación (reflexión y consolidación del conocimiento). Una fase previa del compromiso (Reid, 1989, citado en Henri y Lundgren-Cayrol, 1989, pp. 99-100) en ambos niveles, el social y el cognitivo, es considerada como necesaria para los estudiantes más jóvenes, como un paso preparativo que se presume superfluo para los adultos. Para este estudio, sin embargo, se incluyó el compromiso, puesto que los estudiantes son adolescentes, con experiencias educacionales muy tradicionales, requiriendo así una introducción para las nuevas estrategias. Estas fases de desarrollo, una tecnología más colaborativa (instrumento psicológicos y técnicos [Joiner *et al.*, 2000]) y un contexto o ecología (Crook, 2000; Littleton, 2000), fueron escogidos como las categorías para analizar el aprendizaje colaborativo.

En términos del instrumento psicológico del lenguaje, de importancia particular para este estudio de María, como maestra de ciencias, es el uso que ella hace del lenguaje científico. Como Lemke (1997, pp. 11-12) expresó, "hablar" de ciencia es leer, escribir y enseñar a través del lenguaje de la ciencia, lo que significa llevar a cabo todas las actividades científicas con el uso de este lenguaje, destacando explícitamente las relaciones semánticas dentro de un tema. Esto es lo que Scott (1996) llamaba "hacer que la narrativa sea más provechosa para todos los estudiantes" (p. 332), promoviendo así los significados compartidos, y que hace posible la intersubjetividad. Lemke describía las normas formales, estilísticas del lenguaje científico como verbalmente explícitas, universales, serias y explicatorias, las cuales ayudan a continuar la mistificación de la ciencia como abstracta, incambiable y sólo accesible para los expertos. En contraste a este uso formal del lenguaje científico, López y Mota (2003) enfatizó la importancia del aprendizaje de la ciencia por parte de los estudiantes como un discurso situado, una actividad que requiere de co-participación y negociación en la adaptación de sus recursos lingüísticos.

Comunidad de práctica

La comunidad de práctica es una unidad compleja de análisis dentro de una teoría constructivista sociocultural de aprendizaje situado, donde el compromiso en las prácticas sociales es considerado esencial para que ocurra el aprendizaje y para la formación de la identidad (Lave y Wenger, 1991; Littleton, 2000; Rogoff, 1994; Wenger, 1998). Las comunidades de práctica, según Wenger (2002), están formadas por un grupo de personas que se caracteriza por los siguientes tres aspectos esenciales: *a)* comparten un interés en un tema, entienden lo que éstos son y están de acuerdo en las aproximaciones comunes; y *b)* forman una comunidad al interactuar entre sí y construyen relaciones, ayudándose a resolver problemas y a responder preguntas, y estableciendo redes de comunicación con otros equipos; el compromiso mutuo dentro de la comunidad, el deber mutuo o la responsabilidad, la participación y grado de legitimidad para negociar también son descriptores básicos; y *c)* tienen práctica en lo que comparten y desarrollan un conocimiento, intercambian información, intuiciones, prácticas fundamentales, objetivos de aprendizaje, enseñanza y aprendizaje y construyen herramientas y un conocimiento base, todo esto dentro de un contexto específico.

Metodología

Descripciones generales del estudio

Este artículo presenta una porción de un estudio de caso longitudinal que se realizó hace más de tres años y medio usando métodos naturalistas cualitativos, con una comparación constante de fenómenos sociales a través de categorías temporales, situacionales e instrumentales (Cohen, Manion y Morrison, 2000). Debido a la complejidad de las interacciones entre las creencias, las prácticas y el contexto, se han utilizado múltiples instrumentos, incluyendo las observaciones de clase sin participación oral, semi estructuradas, con entrevistas profundas y cuestionarios, que podrían ser comparadas con lo que Bleicher (1998, p. 93) llama una "mezcla" de etnografía de aula y de análisis del discurso sociolingüístico para el estudio de la interacción en el salón de clase. Esta forma de etnometodología da voz a la maestra para expresar sus creencias, así como su manera de organizar y entender su mundo como maestra de ciencias naturales de una escuela (Taylor y Bodgan, 1990).

Recolección de datos y análisis

Instrumentos

Creencias

Las creencias iniciales de María han sido parcialmente inferidas de cuatro cuestionarios que se aplicaron en el primer año, desarrollados para los maestros de ciencias, dos sobre el constructivismo (Dass, 2001; Proyecto de investigación I de Salish, 1997),[7] y dos sobre el NOS para identificar sus creencias epistemológicas como maestra de ciencias (Nott y Wellington, 1993, citados en Monk y Dillon, 1996, pp. 131-135; Proyecto de investigación I de Salish, 1997). Además, se realizaron dos entrevistas semi estructuradas a fondo, una sobre su filosofía del aprendizaje (Proyecto de investigación I de Salish, 1997), y otra después de una observación de laboratorio. Todos los datos fueron grabados y transcritos por un auxiliar de investigación y más tarde revisados por los autores a través de la comparación de las cintas originales para su precisión.

La entrevista sobre su filosofía de la enseñanza (Proyecto de Investigación I de Salish, 1999) duró una hora y media y la segunda, después de

[7] Los autores reconocen a P.M. Dass y a R. Yager por haber compartido generosamente estos instrumentos.

la sesión de laboratorio, una hora. La entrevista sobre la filosofía de la enseñanza fue analizada usando el Proyecto de investigación I de Salish que codifica el esquema, así como por nuestras categorías de investigación previamente descritas. La entrevista semi estructurada, después de la observación de laboratorio, animó a María a hacer explícitos sus objetivos, a dar razones para el uso de ciertas estrategias, para evaluar la clase y sugerir cambios si tuviera que repetir la misma clase, mejorando, de este modo, la validez de la recolección de datos y más tarde las interpretaciones (Taylor y Bogdan, 1990). Sus creencias fueron inferidas por medio de la triangulación de datos de estos cuestionarios y entrevistas, así como del discurso en el salón de clase.

Prácticas de enseñanza

Las prácticas de enseñanza fueron observadas por medio de tres observaciones naturalistas, sin intrusos, en dos clases de biología y una sesión de laboratorio, cada una de 50 minutos de duración, grabadas en video y transcritas (Adler y Adler, 1998). Las notas de campo fueron tomadas de las observaciones que no se registraron en las cintas, tales como los movimientos o actividades en las áreas del salón de clase o en otro sitio que no se encontraban dentro del campo de las grabaciones. Las notas también se hicieron con materiales usados por la maestra y los estudiantes (Cohen *et al.*, 2000). Las observaciones en el aula reportadas aquí se realizaron al inicio del proyecto y sirvieron como un registro de las prácticas de enseñanza de María en ese momento. Todas las observaciones y entrevistas se llevaron a cabo por el primer autor, asegurando una mayor uniformidad en la recolección de datos. Los datos recolectados a través de estas múltiples mediciones también sirvieron para caracterizar la clase y el contexto escolar.

La recolección de datos fue diseñada para poner a prueba las creencias de María acerca de la enseñanza de la ciencia y el aprendizaje de los estudiantes, las concepciones de ella del NOS y sus prácticas, como se muestra a través de su discurso y acciones. Los datos fueron analizados con los códigos previamente prescritos, desarrollados de tres marcos de trabajo teóricos con la ayuda del *software* Atlas-ti (Desarrollo del *Software* Científico, Berlín, 1996-2000). Este *software* fue usado para categorizar, de manera flexible, los datos con códigos emergentes agregados, como algo que se cree necesario para identificar los diferentes aspectos de manera más precisa. Como se mencionó anteriormente, el análisis del discurso usado aquí sigue al modelo de Edwards (1993) de la observación pragmática de interacciones verbales: la identificación de las reglas básicas del discurso educacional. Los datos fueron triangulándose entre las observaciones, entrevistas y los cuestionarios aplicados durante el mismo periodo. Esta comparación constante permitió que se identificaran los temas clave y los eventos recurrentes relacionados con las creencias expresadas de la maestra y con las prácticas observadas.

El hecho de que este sea un caso de estudio para un solo maestro es una restricción para las conclusiones que se pueden obtener, así como para su aplicabilidad. Aunque los escasos datos presentados constituyen una limitación más lejana; la continuidad, el estudio a largo plazo, proporcionará mucha más información. Aun cuando el método usado fuera el último intruso (Adler y Adler, 1998), aun hay efectos inevitables por tener a un observador en el salón de clase, y todavía existe una inevitable predisposición por parte del investigador (Luft *et al.*, 2003). Estos efectos se podrían considerar como parte de lo que Clandinin y Connelly (1998, pp. 119-137) describieron como las condiciones interactivas y temporales de los métodos de experiencia personal, mientras que representen las experiencias de campo como textos de campo y que los transformen después en textos de investigación.

Sin embargo, creemos en la validez de las conclusiones que se tienen que reforzar a través de la triangulación de los datos recolectados con numerosos instrumentos, así como a través de las discusiones entre los dos investigadores. Cada uno de nosotros leyó las transcripciones de manera separada, realizando un análisis individual que comparábamos después, antes de desarrollar uno final. Las preguntas que surgieron durante el análisis fueron planteadas a María para clarificar nuestras interpretaciones. La confiabilidad en cuanto al significado de las observaciones se incrementó por medio del estudio longitudinal durante varios años, observando a la maestra con diferentes grupos de estudiantes o trabajando con distintos contenidos biológicos, algunas veces en clase otras en el laboratorio (Adler y Adler, 1998).

Aunque los resultados presentados aquí corresponden particularmente a una maestra en su propio contexto específico, creemos que esta intromisión a las creencias y prácticas de una maestra de biología de escuela superior, mediada por las restricciones institucionales, es una contribución en el campo de investigación de la maestra y en el diseño de la investigación misma, aplicable a futuras investigaciones. Esto es especialmente significativo en México debido a la escasez de información que se tiene en la enseñanza de la ciencia.

Análisis

Creencias

De manera general, los cuestionarios mostraron que María tiene una actitud positiva hacia los principios básicos del constructivismo; que los estudiantes deben construir su propio conocimiento a través de la discusión de ideas; que ellos deberían de tener un rol activo en los procesos de aprendizaje en las clases de ciencias, aunque bajo el control del maestro; que la enseñanza de la ciencia debería estar relacionada con aspectos sociales y culturales de la vida de los estudiantes.

Sin embargo, el análisis de la entrevista sobre su filosofía de la enseñanza (proyecto de investigación I de Salish), mostró una preponderancia de las creencias centradas de la maestra, tales como el "hacer" y "explicar" de la maestra, aunque entremezclado con posiciones más centradas del estudiante, tales como facilitar la transferencia del conocimiento a la vida cotidiana de los estudiantes. Ella también expresó los objetivos muy centrados del alumno cuando se le pidió que describiera sus principales metas para la enseñanza: *a)* motivar a los estudiantes para que aprendan biología; *b)* relacionarla con otras ciencias; y *c)* que deberían aprender a ser "educados" y respetuosos. María mostró un interés específico acerca de la actualización de su conocimiento, así como creatividad en la presentación de éste.

María describió su conceptualización del aprendizaje como: "[los estudiantes] aprenden mejor cuando ellos leen, entienden y uno les explica sus dudas" P4: 24.[8] La entrevista, después de su clase de laboratorio, corroboró esta posición como aquella de que una persona aprende individualmente leyendo, seguida por las explicaciones y discusión con la maestra experta (P7: 19). Este modelo tiende a legitimar la identidad y el valor de la maestra dentro de la comunidad como el centro indispensable de todas las actividades de aprendizaje. María también enfatizó la importancia de vincular las nuevas palabras con lo que uno ya entiende para formarse un nuevo concepto (P4: 9), desarrollando relaciones semánticas (Lemke, 1997), enfatizando la importancia de que los estudiantes participen activamente en su propio aprendizaje (P4: 27). Ella siguió diciendo que este proceso usualmente requiere de la ayuda de una persona más experta, una perspectiva vygotskiana del aprendizaje. Ella dijo que uno ha "aprendido" algo cuando lo puede aplicar y relacionar con otros temas o fenómenos (P4: 45).

Considerando su rol como maestra, María lo representó a través de la metáfora tradicional de los estudiantes como vasijas por llenarse:

> Voy a tratar de sacar información de ellos y a la vez, pues voy a irles metiendo la nueva información para que ellos vayan enriqueciendo, ¿verdad? (P7: 9).

Ella creía que había evolucionado a partir de sus anteriores métodos tradicionales, en parte debido a los cursos del programa de maestría:

> Lo de antes fue que era yo una maestra tradicional, solamente me importaba buscar información en un solo libro, dictárselos o contárselos yo misma (P4, 09-18).

[8] Pl se refiere a las transcripciones de las observaciones de dos clases de biología en diciembre de 2000; P4: entrevista sobre la filosofía del aprendizaje en noviembre de 2001; P6: observación de laboratorio en marzo de 2002; P7: entrevista después de la observación de laboratorio en marzo de 2002. El segundo número identifica la frase particular o las líneas dentro del documento.

En la misma entrevista, María dijo que un maestro no sólo debe conocer su tema, sino también presentarlo a los estudiantes para que puedan hacer uso del conocimiento ("*aprovechar los conocimientos*") (P4: 44). Ella expresó su confianza en que había mejorado; que se hallaba satisfecha con su identidad profesional, como una buena maestra que conocía su tema, aunque no dejaba de atribuir su éxito a un largo proceso de trabajo con los estudiantes, lo cual venía a ser una reflexión directa del contexto institucional. Ella dijo que su temor de perder el control sobre la clase, durante el año pasado, había disminuido:

> Ahora me siento como un poquito más segura cuando pongo a trabajar a los alumnos en equipos y el querer que ellos aprendan por ellos mismos y antes me daba más miedo, sentía como que no podía, que no los podía controlar y ahora sí… (P4: 34).

Con respecto a su postura epistemológica, María expresó principalmente sus creencias positivistas-empiricistas tradicionales, pero estaba consciente, al mismo tiempo, de la importancia de las influencias sociales y culturales, de los cambios en la teoría científica y en la opinión. Estas creencias indicaban una inter mezcla de posiciones positivistas con creencias más realistas y contextualizadas. Como se había encontrado que las perspectivas de los maestros del NOS eran cambiables y muy eclécticas (Abd-El-Khalick, Bell y Lederman, 1999; Lederman, 1999), se reconoció a los cuestionarios como poco fidedignos en la identificación de la postura de ellos (Mellado, 1998). Tomando esto en cuenta, los datos aun proporcionaron un punto de comparación interesante con sus prácticas y, ciertamente, su posición reflejó lo de muchos otros maestros de ciencias (Flores *et al*., 2000; Mellado, 1998).

Todas las creencias articuladas de María indicaban una posición intermedia en su conceptualización del NOS, así como entre los modelos constructivistas y los centrados en el maestro. Consideramos que esto es coherente con el mismo constructivismo, ya que el modelo supone una construcción activa de los nuevos conceptos que, con el tiempo, inevitablemente implican contraste e interacción de las viejas y nuevas ideas durante el desarrollo de uno nuevo. Por otro lado, podría representar una apropiación parcial de ciertos términos, únicamente en el nivel del discurso, pero no plenamente integrada dentro de su sistema de creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia, con la posibilidad de que ellos nunca puedan volverse así. Como Lemke (2001) señaló, un cambio conceptual no es simplemente una elección racional, sino un proceso social que afecta la identidad de uno en una comunidad. Más adelante interpretaremos el impacto del contexto de María, tanto en sus creencias y prácticas como en esta postura sociocultural.

Prácticas

Analizamos las prácticas de María a través de los videos de sus clases observadas, de su discurso e interacciones con sus estudiantes en las clases, así como a partir de sus propias descripciones durante las entrevistas. Como las categorías que usamos en el análisis se basaron en los tres marcos de trabajo teórico, anteriormente descritos, los presentamos de la misma manera. El análisis del discurso fue usado concurrentemente para identificar la manera de hablar de María en la clase, en qué forma y estilo "habla" de ciencia con sus estudiantes.

Conocimiento común

De acuerdo con sus propias descripciones, María dijo que había cambiado sus estrategias de enseñanza de cuando ella se convirtió en maestra por primera vez, cuando simplemente se dedicaba a dictar notas a los estudiantes. Durante el tiempo de las observaciones, María usaba las preguntas como una estrategia básica de enseñanza, tanto orales como escritas. Algunas veces los estudiantes respondían individualmente o en grupos, usualmente basándose en las fotocopias que ella les daba, ya que los alumnos no tenían libros de texto. Esta estrategia era útil para una amplia variedad de propósitos, uno de ellos era centrar la atención de la clase o de algún alumno distraído. Ella también la usaba para establecer los límites de conocimiento común, tales como recordar a los estudiantes el tema visto en la clase anterior para vincularlo con la que estaban viendo en ese momento o para establecer las bases del vocabulario requerido. Normalmente, María utilizaba técnicas de diálogo triádico (Lemke, 1997), comúnmente conocidas como IRF (Inicio del maestro o Preguntas, Respuesta del estudiante, Retroalimentación del maestro o Comprensión) como estrategias a seguir y desarrollar las respuestas de los estudiantes con el fin de dirigir sus pensamientos. El IRF es una de las estrategias más comúnmente halladas en la enseñanza de la ciencia, la que favorece la fuerza del maestro mientras ella tenga un cerrado control todo el tiempo (Lemke, 1997). Tomamos un ejemplo de su laboratorio sobre los nutrientes en el alimento:[9]

> M: A ver. ¿Qué contiene la naranja?
> A: Carbohidratos.
> M: Carbohidratos. ¿Por qué carbohidratos? ¿Cómo saben que tiene carbohidratos?
> A: Porque da energía.
> M: Porque da energía. Y ¿qué más?

En esta parte, ella estaba tratando de hacer que los estudiantes hicieran hipótesis sobre los contenidos nutrientes de una naranja, con el propósito de que aprendieran a apoyar sus respuestas. También se exploró el conocimiento y el razonamiento de los alumnos de manera oral. Este ejemplo era coherente con su concepto de aprendizaje, aquel que dice que no se debe dar a los estudiantes todas las respuestas, ya que ellos tienen que "construir" su propio conocimiento.

Sus técnicas para hacer preguntas eran bastante uniformes y exitosas puesto que promovían una participación considerable del estudiante, aunque de una manera muy controlada. Esto siempre le ayudaba a mantener su rol de experta. La mayor parte de las preguntas eran cerradas; pedía el

[9] M se refiere a María y A al estudiante (alumno) y As cuando más de un estudiante responden juntos.

contenido específico, como las definiciones de ósmosis o de difusión, aunque algunas eran más abiertas y de nivel cognitivo más alto, como "¿Por qué son diferentes el transporte pasivo y el transporte activo?" (Pl : 136-137). Las elecciones de María de proporcionar a los estudiantes material de lectura, seguido de preguntas que se tenían que contestar, eran completamente coherentes con su contextualización del aprendizaje, tanto para ella misma como para los estudiantes. Ella también mostró interés acerca de la elección de los materiales más actualizados, aun cuando esto significara que los tendría que pagar.

María construía el conocimiento en los estudiantes ampliamente al hacer volver el conocimiento común con frases como "recuerden que..." Ella estaba muy consciente de que era necesario reafirmar sus conocimientos anteriores. Esto lo mencionó en la entrevista después de la sesión de laboratorio sobre la nutrición:

> Sí, o sea, si se notan deficiencias en cuanto al entender lo de la composición química de los nutrientes, como que se les olvida, ¿verdad? Entonces hay que estar reafirmándoles cada vez.

En este caso, ella había estado trabajando en los grupos sobre los nutrientes, y aprovechó varias discusiones con los estudiantes en el laboratorio para revisar su conocimiento supuesto acerca de sus estructuras químicas, tales como los carbohidratos que contienen carbón, hidrógeno y oxígeno.

También utilizó las estrategias del IRF para hacer explícitos los resúmenes, como cuando discutía con los estudiantes el movimiento de las moléculas en el transporte pasivo y en diversas ocasiones para contar con una relación habilidosa de los conceptos, como en la discusión sobre la difusión:

> M: ¿Por qué (habría una difusión más rápida en agua caliente)?
> A: Por la energía.
> M: Por la energía, pero ¿qué tiene que ver la energía? ¿De que está hecha el agua?

> A: De moléculas.
> M: de moléculas ¿verdad?, ¿de qué? De H2O ¿verdad? Y ¿qué pasa si ustedes hierven el agua?
> As: Se evapora.
> M: ¿Por qué se evapora?

María había pasado gran parte de la clase explicando los mecanismos de la difusión, usando varios ejemplos de oxígeno, dióxido de carbón y agua. Esta parte fue hacia el final de la clase, después de demostrar la difusión con gotas de azul de metileno en agua. Su línea de preguntas era coherente con sus creencias de que la enseñanza de la ciencia requiere de la interrelación de conceptos, en este caso, de temas físico-químicos que afectan los mecanismos biológicos.

Las observaciones en el aula mostraron que la participación se limitaba a sólo una parte de la clase, con un número variante de estudiantes distraídos o marginalizados, un asunto que le interesaba mucho. Ella había intentado incorporarlos a las actividades de las clases a través de regaños, de tareas especiales y de estímulos. No fue fácil, el tiempo pasaba y ella debía guiar a los estudiantes a un tipo de trabajo más activo, puesto que habían sido instruidos por maestros que sólo les dictaban. Este era un ejemplo claro de la lucha contra las estrategias prevalecientes en el aula dentro de su contexto escolar:

> [...] el semestre pasado, les dio otro maestro y estaban acostumbrados a que les dictaran [...] Primero los vi como extrañados con la forma como les he estado enseñando, a aprender, eh! (P7: 13, 187-203).

La reacción de la sorpresa de los estudiantes es un ejemplo de lo que Bleicher (1998, pp. 92-93) llamaba una "ruina de marco". Él se refería a los distintos marcos de referencia de maestros y alumnos que podían ver sus diferentes expectativas en una clase. Era evidente que el marco de referencia de los estudiantes era el de el maestro tradicional que dicta, por lo que las clases de María resultaban ser una causa de conflicto con cada nuevo grupo.

A pesar de esta reacción inicial y de resistencia por parte de sus estudiantes, María tuvo suficiente confianza en sus estrategias para seguir usándolas, reportando después de que por lo menos algunos estudiantes definitivamente habían manifestado preferir su manera de enseñanza más activa y que sentían que aprendían más (P7: 201-203). Otros estudiantes habían reportado que en una clase de dictado tradicional, ellos sólo esperaban a que la clase terminara, ya que todo lo que hacían era escribir. Ella consideraba que esta respuesta le daba validez a sus propias estrategias de enseñanza (P7: 64).

En todas las clases observadas se pudo ver que la participación estaba muy dirigida, ya que era la maestra quien elegía el contenido y las actividades para la clase y el laboratorio, así como en la forma en que estas dos materias se llevarían a cabo sin que los estudiantes pudieran intervenir virtualmente. Varias tareas en casa para el trabajo de laboratorio contaban con el potencial de promover un nivel de participación más significativo, pero en la forma en que se daban los métodos, cada ejercicio se convertía más en uno de ritual que de proceso, como el de diseñar un experimento para mostrar la ósmosis (Pl). En una clase, aplicó una demostración de difusión, estableciendo así una atención compartida, por medio de estrategias específicas, con el fin de atraer a los estudiantes más distraídos:

> Aquí le vamos a agregar –Fíjense eh!– Fíjense en el agua cómo se ve y le vamos a agregar –Toma el tiempo, Javier– unas gotas de azul de metileno.

Javier, el estudiante al que María se refería, había estado hablando con sus amigos y no había oído la pregunta, por lo que trataba de integrarlo a la actividad como una manera de control, pero también para que él compartiera el significado de la demostración.

María tenía intenciones definitivas de facilitar la transferencia del conocimiento, del salón de clase a la vida cotidiana de sus estudiantes, para que el aprendizaje de ellos mejorara su nutrición a partir de un simple ejercicio en el laboratorio (P6), donde supuestamente identificaron algunos componentes nutricionales en algunos alimentos. Ella consideraba que la transferencia del conocimiento era uno de sus objetivos generales dentro de la enseñanza y mostraba su intención por construir el conocimiento previo de los estudiantes, tal como lo expresó en la entrevista después de laboratorio:

> [Mis objetivos en esta clase fueron] en primer lugar, saber si los alumnos saben qué contienen los alimentos, y los otros objetivos son que, pues, que ellos aprendan,…ya sea práctica o teórica,…pues el objetivo es que mejoren su comida diaria ¿verdad? (P7: 6).

Sus objetivos aquí eran muy claros y específicos, aunque posiblemente no igualados con la simplicidad del ejercicio. Ella mostró interés para que sus alumnos mejoraran su ingestión nutricional, una transferencia deseada de conocimiento biológico "teórico" a sus propias vidas. Estas creencias fueron indudablemente la fuerza conductora en su elección de un nuevo libro que acababa de adquirir y de este ejercicio particular de laboratorio, y a través del cual creía que podría alcanzar su meta total.

Normalmente, María pasaba una parte considerable de la clase preparando el vocabulario científico básico, necesario para comprender el tema bajo estudio, como en su primera clase sobre nutrición que describió en la entrevista después de laboratorio:

> Ya hablamos sobre definir el concepto de qué es nutrición, qué es un proceso del uso de nutrientes y que ahí va lo que es lo de la digestión, la absorción y la defecación, son los pasos, los procesos de los nutrientes.

Aunque ella dijo "ya hablamos," es poco probable que los estudiantes dieran más de una o dos respuestas. Como se ha visto en los ejemplos presentados aquí, eso representa escasamente una oportunidad para usar el lenguaje científico que ellos tenían que aprender. Sin embargo, con esta descripción, María mostró que fue más allá de las definiciones inmediatas, y que trató de desarrollar una perspectiva más global sobre la nutrición con el fin de mostrar a los estudiantes los diferentes procesos que se hallan implicados. Ella intentó contextualizar el tópico dentro de los procesos de la digestión, algo con lo que los estudiantes están familiarizados. Las estrategias más ritualistas que María usó, en el sentido de centrarse en las definiciones biológicas y en el vocabulario básico, eran sin duda fuertemente influidas por el contexto institucional, por el plan de estudios oficiales y por los exámenes semestrales.

Sin embargo, en muchos momentos durante las clases observadas era evidente que ella también intentara promover una mejor comprensión de las interrelaciones de los conceptos importantes y de desarrollar relaciones semánticas (Lemke, 1997). Con frecuencia haría esto al resumir los conceptos sobre el pizarrón con tablas o diagramas, repitiendo frases, refraseando explicaciones, pidiendo definiciones, usando múltiples ejemplos e imprimiendo énfasis sobre la importancia de aprender el lenguaje simbólico. Uno de sus objetivos de enseñanza manifestados era que ellos aprendieran y que no memorizaran para pasar el examen aunque, como se mencionó anteriormente, la importancia de los exámenes de opción múltiple estandarizados, aplicados en cada semestre, también eran muy evidentes en su agenda de enseñanza.

El análisis destacó las reglas básicas del discurso en el aula como implícito, con los estudiantes buscando las "reglas" en lugar de explorar las diferentes facetas del conocimiento en discusión (Edwards y Mercer, 1987). María siempre mantuvo un firme control sobre las discusiones a través del uso extenso de sesiones de preguntas que, con frecuencia, se podían considerar como "juegos de adivinanzas", haciendo que los estudiantes se concentraran para tratar de hacer, decir o descubrir las respuestas "correctas" a través del sistema de prueba y error. Esto era, de manera esencial, un proceso "ritualista" más que una discusión de los conceptos. Los estudiantes habían aprendido sus reglas básicas, como si hubiera una pausa o una pregunta repetida como en el ejemplo que a continuación se da, en donde la respuesta proporcionada era incorrecta y ellos tenían que intentar otra:

M: ¿El agua tiene energía?
A: No.

M: ¿Nos proporciona calorías?
A: Sí ¿no?
M: ¿Sí?
A: No.
M: No.

En este ejemplo, ligeramente más complejo, que se desarrolló durante la sesión de laboratorio sobre los nutrientes alimenticios, el estudiante respondió la pregunta inicial de manera correcta. Sin embargo, para confirmar su comprensión, María repitió la pregunta en términos un tanto diferentes, lo que hizo que el estudiante, con cierta inseguridad, cambiara su respuesta a *sí*. Ella entonces preguntó usando la misma palabra de la respuesta "¿Sí?" Con esto, él pareció recibir el mensaje de que la respuesta correcta era *no*, que la maestra repitió entonces para confirmar. A través de la técnica IRF sobre el control del discurso, ella estaba juzgando la validez del conocimiento del estudiante. Esto también demostró la creencia de María de que ella debe "conducir" las respuestas de los estudiantes a través de preguntas en lugar de decírselas directamente. Esto era consistente con su idea de que era un error dar las respuestas a los estudiantes, ya que fácilmente olvidan lo que se les dice.

Una discusión interesante se dio con una segunda estudiante quien insistía en que el agua le daba energía. Ella respondía que el agua tiene calorías porque si le da sed la bebe, que eso es un "hidrato" de agua. María no entendía y le pidió que aclarara el asunto, pero la chica insistía que si ella estaba deshidratada, el agua le daba energía. Ella incluso respondió correctamente la pregunta de María de que los hidratos de los que ella estaba hablando eran "carbón hidratos," o "carbohidratos," pero María siguió preguntando acerca de la composición química de los carbohidratos. Luego intentó hacer que la misma alumna se diera cuenta de que si el agua no tiene carbón, no puede tener carbohidratos, pero en ese momento la clase terminó y la discusión se quedó ahí. Este es un ejemplo claro de la relación semántica diferente que la estudiante ha construido, y del problema de comunicación con la maestra, el cual es "científico" (Lemke, 1997).

En sus clases, ella centraba la atención de los estudiantes a través de preguntas sobre lo que consideraba los mayores conceptos científicos, mientras que ellos le hacían preguntas, casi exclusivamente para aclaraciones o permisos, lo que reflejaba el desequilibrio de poder y autoridad en la clase. Gradualmente, la maestra y los estudiantes construían un repertorio común a pesar de esto, pero era probable que el conocimiento común fuera muy superficial, con muchos malentendidos sin atender. Las prácticas globales no aseguraban necesariamente el establecimiento del conocimiento común efectivo que permitiría la transferencia de la competencia y autonomía a los estudiantes, descrita por Edwards y Mercer (1987). Las interacciones estudiantiles que se produjeron estaban en gran parte relacionadas para descubrir las reglas conversacionales implícitas, en lugar de desarrollar la competencia comunicativa del lenguaje científico que se estaba enseñando (Bleicher, 1998; Lemke, 1997).

Aprendizaje colaborativo

Hubo muchos ejemplos en los que María estaba promoviendo el compromiso de los estudiantes hacia la clase en el nivel social, intentando desarrollar un clima apropiado, llamando su atención al decir que ella haría las preguntas, permitiéndoles trabajar en equipos, lo cual disfrutaban mucho. Ella decía que también los motivaba al darles diferentes actividades, así como ofreciéndoles ayuda a aquellos que la necesitaran. Una de las cosas de mayor interés para ella era la necesidad y el deseo de estimular la motivación: ("mi reto es con todos y más con los que no quieren trabajar") (P7: 22). Ella intentaba comprometerlos en el trabajo:

> [...] regañándolos, llamándoles la atención, hablándoles directamente o generalmente yo les reviso todos sus trabajos y les digo que al final esto les va a servir para su evaluación y eso me da resultado porque trabajan y al final sí les tomo en cuenta todo su esfuerzo que realizaron.

Estas estrategias que María usaba para la motivación parecían confirmarle la creencia de que la razón de que algunos estudiantes no trabajaran era debido a las malas experiencias previas de la escuela, y que si uno les pone atención, ellos responderán. También era coherente con su creencia de que todos los estudiantes pueden aprender si hacen el esfuerzo, y aún tenía otro ejemplo que hablaba de la importancia institucionalmente sancionada que se les da a los grados, en donde vale la pena hacerlo si eso ayuda en el promedio final.

María dedicó una gran parte de tiempo y de energía en comprometer a los estudiantes, socialmente, en diversas actividades, en crear una sensación de pertenecer a un sitio, de cohesión y de producción en el grupo. Ella realizó esto a través de muchas de las estrategias ya descritas y de diversos estilos de hacer preguntas y de discutir los temas con los estudiantes, con el trabajo en equipos en donde ellos tenían que investigar diferentes temas, más que copiar respuestas de un texto como usualmente lo hacían para responder preguntas. En sus clases regulares, María estaba interesada en que sus estudiantes aprendieran biología, pero también que aprendieran a aprender; sin embargo, había poca comunicación explícita de estas metas con sus estudiantes.

María casi controlaba exclusivamente la exploración de cualquier tema, de la presentación de materiales a las estrategias cognitivas para la información sobre investigación, a las instrucciones específicas para las actividades. Ella regularmente hacía un esfuerzo para vincular las ideas y los conceptos durante sus clases, como se puede ver en su respuesta cuando se le preguntó cómo se había decidido a moverse de un tema a otro:

> […] cuando hay alguna relación, por ejemplo si yo les voy a hablar de la membrana, yo me puedo meter con los conceptos de la nutrición.

Su respuesta destacó la importancia de que María se puso a relacionar los diferentes temas biológicos en lugar de enseñar simplemente la estructura de la membrana celular. Esto era consistente con sus perspectivas más contextualizadas sobre el NOS, así como con sus creencias constructivistas sobre la enseñanza de la ciencia, donde los estudiantes deberían desarrollar conceptos interrelacionados.

Las estrategias elegidas de María también enfatizaban el aprendizaje intencional, al menos en un nivel implícito, que los estudiantes comprenden, y la importancia del conocimiento en el sentido de tratar de relacionar los conceptos a sus vidas cotidianas, tales como vincular la difusión con la respiración o con la energía molecular o el contenido de nutrientes en los alimentos con dietas adecuadamente balanceadas de acuerdo con los requerimientos de energía. Esto era completamente coherente con sus creencias de aprendizaje expresadas. Era notable que aun con este nivel del control de la maestra en la fase de exploración, sus esfuerzos para hacer a los estudiantes participantes más activos en su aprendizaje estuvieran en fuerte contraste con el nicho cultural en el que ella trabajaba, donde hay muchos maestros que principalmente dictan, sosteniendo la cultura tradicional "estándar" del aprendizaje con estudiantes pasivos (P7).

Hubo poca evidencia sobre el trabajo colaborativo del estudiante que implica el aspecto crítico de la interdependencia positiva, ya que las interacciones eran esencialmente entre María y los estudiantes. Ella sí apoyaba y motivaba la elaboración del conocimiento, pero esto estaba estrechamente controlado por ella, como ya se dijo, muy en línea con su concepto constructivista del aprendizaje del estudiante, donde él:

> [...] él mismo está poniéndose en contacto con el material de estudio, él es que hace las cosas, él es el que elabora sus preguntas,…y yo simplemente, ya nada más les voy dando ideas, ¿verdad?...cuando veo que están muy simples yo les ayudo a complementarlas.

A pesar del hecho de que aquí el rol descrito de María era mucho más como facilitador, había poca o ninguna negociación de grupo observado, y la validación de ideas y soluciones correspondía principalmente a su conocimiento o al del texto, no al de los estudiantes, enfatizando así su posición tradicional como fuente del conocimiento experto. Una excepción parcial a esto era cuando ella ponía notas en el pizarrón usando o modificando las respuestas del estudiante a las preguntas de ella, validando de esta manera el conocimiento de los estudiantes hasta cierto grado. Por otro lado, su concepto expresado del conocimiento, así como la habilidad de aplicarlo a otras situaciones y a relacionar ideas, estaba muy en línea con el constructivismo (Henri y Lundgre-Cayrol, 1998). De este modo, había una incongruencia entre sus creencias manifestadas y sus prácticas totales. Sin embargo, estas prácticas se hallaban completamente en armonía con la definición del aprendizaje colaborativo que María les daba en un cuestionario, el cual trataba sobre la implementación del aprendizaje colaborativo en el que los estudiantes trabajaban en equipos bajo su control y evaluación. Aunque su definición estaba lejos del modelo usado en este análisis, se podía considerar más cercano a aquel que es mucho más general de Rogoff (1998), en donde ella simplemente describía el aprendizaje colaborativo como "cuando el esfuerzo y sus procesos de pensamiento se manifiestan, al menos parcialmente, en común" (p. 263).

La evaluación de María en la clase era casi exclusivamente sobre una base individual valorando, de manera intuitiva, la comprensión a través de preguntas, tanto en forma oral como escritas. Este es el reflejo común de la ideología dominante en las escuelas, en donde el aprendizaje es un proceso individual (Lemke, 1997). A través de las preguntas continuas y de su interacción con los estudiantes, María fomentaba cierta cantidad de reflexión y retroalimentaba el contenido para mejorar la comprensión, tratando de consolidar el conocimiento a través de la revisión y el enlace de conceptos y estableciendo así una base de conocimiento común. El trabajo de laboratorio era calificado de manera colectiva y muy sumariamente, con ninguna valoración formal de los procesos o de auto evaluación por los estudiantes, virtualmente.

No obstante, la evaluación institucionalmente relevante era, sin lugar a dudas, el examen semestral estandarizado, acontecimiento abiertamente reconocido por María, por los estudiantes y por la institución. María pensaba que los estudiantes valoraban sus exámenes de grado más que otra cosa:

> A veces siento que lo que ellos valoran más es su calificación y su asistencia y ya en tercer lugar, el aprendizaje.

La asistencia era importante ya que el reglamento normativo especificaba que ningún estudiante podía a faltar más de 20% de sus clases para pasar una materia. No sólo se categorizaba a los estudiantes por los resultados de sus exámenes, sino que también a los maestros; se les comparaba con otros maestros de biología de la misma escuela o de otras afiliadas al sistema.

Al considerar la tecnología comparativa, de la que hablamos en la entrevista al inicio de TACTICS, María expresó una opinión muy positiva del uso de la computadora y de internet, como herramientas para promover el aprendizaje colaborativo como un fuerte factor de motivación para los estudiantes. Sin embargo, no hubo evidencias de que ella realizara ninguna valoración de su trabajo colaborativo, o que hiciera uso de las experiencias TACTICS de los estudiantes en sus clases. Ella misma se mantenía muy al margen del uso de las computadoras en el proyecto y no era posible usarlas en sus clases.

El principal instrumento colaborativo técnico que empleaba era el pizarrón blanco, escribiendo y dibujando en él, regularmente, para centrar la atención de los estudiantes cuando tenía que desarrollar un concepto. El uso de las fotocopias para los estudiantes era algo muy común. Por lo general, los alumnos leían las fotocopias individualmente y respondían las preguntas que María les dictaba. Con frecuencia, había una colaboración general en el desarrollo de notas sobre el pizarrón basadas en las lecturas. Esto podría ser un paso inicial hacia el conocimiento común, colaborativamente constructivo. De vez en cuando, ella le pedía a los estudiantes que escribieran las respuestas en el pizarrón; se trataba de una actividad muy dirigida con cada uno de ellos, aunque podía hacerlo con toda la clase cuando las respuestas eran incompletas, lo cual también significaba una validación parcial del conocimiento de ellos.

Habíamos asumido que el laboratorio sería el sitio lógico, en una clase de ciencia, para observar el uso de instrumentos colaborativos. En la sesión reportada aquí, la estrategia era considerablemente más abierta de lo que se veía en el trabajo práctico, comúnmente descriptivo, dejando a los estudiantes que hicieran "hipótesis" como en el contenido nutriente de los alimentos. Las tareas habían sido puestas por María y los estudiantes parecían estar más interesados en cumplir los requerimientos básicos, como el de cuántos alimentos deberían incluir en su tabla nutricional, más que hacer una investigación a fondo. María promovió esto bastante bien y revisó el número de alimentos más que la calidad de las respuestas. En general, hubo pocas evidencias de colaboración y, en el mejor de los casos, hubo una división del trabajo entre los estudiantes.

Otra actividad potencialmente colaborativa fue el caso de la demostración de difusión de María en el salón de clase, como se mencionó anteriormente, donde a los estudiantes les correspondía observar y explicar los resultados. Aun cuando la maestra usó una presentación frontal para promover la producción de conocimiento compartido, terminó con algunas preguntas. Con esto, estimula una elaboración lejana del concepto de difusión; promueve niveles cognitivos más altos de discusión, tales como la relación de la difusión y del transporte pasivo, y trata de enfatizar la diferencia entre los mecanismos y resultados del transporte (Pl: 47). En este último ejemplo, las indicaciones de contextualización usadas por María fueron el cambio en el tono de su voz, así como la repetición de frases usando un acento pausado, fuerte, en las palabras clave (Bleicher, 1998). En todos estos casos, la organización y la coordinación estuvieron bajo el control de la maestra, con la excepción de los detalles sociales y de procedimiento menor en el trabajo de laboratorio.

El análisis de los instrumentos colaborativos psicológicos fue un asunto sutil, mucho más complejo, particularmente con respecto al lenguaje, el mediador social o recurso semántico usado para relacionar y comparar los significados, como los descritos por Lemke (1997, p. 12). Como lo expresamos anteriormente, María empleó numerosas estrategias didácticas para promover la interacción de los estudiantes en su clase, principalmente a través de preguntas y de un diálogo triádico (Wells, 2000). Los documentos analizados aquí también ejemplificaron lo que Edwards (1993) llama "el habla y el texto", ilustrando el estatus intersubjetivo de cada uno de los participantes en las prácticas situadas. María puso una gran importancia en la discusión verbal de los temas, como base para que los estudiantes desarrollaran su propio entendimiento. De manera inversa, las observaciones indicaron que ellos daban una mayor validación o estatus al texto escrito de la maestra que a su expresión oral, a tal punto de que su habla era con frecuencia ignorada por muchos, pero todos ellos registraban sus notas. Esto destacó intensamente su rol experto reconocido como la administradora del conocimiento legitimizado, pero sólo cuando lo presentaba como un dictado o formalmente escrito. La falta de discusiones profundas, de negociaciones de significado y de oportunidades por parte del estudiante para usar simplemente el lenguaje biológico que ellos tienen que desarrollar, limitó severamente la intersubjetividad que podría haberse desarrollado (Joiner et al., 2000; Rogoff, 1998; Wells, 2000). Una vez más, el contexto institucional era visible, donde el plan de estudios y el conocimiento verbal, ya sea del maestro o en un texto, eran el conocimiento legitimizado.

Normalmente, el clima en el salón de clase reflejaba una relación muy relajada entre María y sus estudiantes. Algunas veces tomaba asistencia mientras los estudiantes iban y venían en diferentes momentos. Había una tolerancia general con respecto al ruido y al movimiento durante los periodos de clase entre maestros y alumnos, tanto dentro como fuera de los salones, una señal de que éstos se aceptaban dentro de la cultura escolar. Pero si la interacción social sobrepasaba ciertos límites, algunos estudiantes también tomaban parte activa callando o reprendiendo a sus compañeros (Pl), indicando con esto que compartían implícitamente el objetivo de mantener un ambiente de aprendizaje adecuado. Tanto el espacio del aula como su mobiliario debían facilitar el trabajo del grupo, aunque no se observara tanto una colaboración intencional. Los estudiantes tenían la libertad de elegir sus lugares. Por lo general, los más atentos a la clase se sentaban en el frente y los demás se dispersaban alrededor del salón de clase. Parecía que de esta manera se formaban los grupos sociales. A aquellos que ponían muy poca atención a lo que estaba sucediendo en la clase, la maestra se les acercaba, les revisaba sus cuadernos y les hacía preguntas. María casi siempre estaba al frente de su escritorio y del pizarrón. Allí se quedaba mientras dirigía una discusión, pero también se movía por todo el salón para observar el trabajo y para hacer o responder preguntas, tanto en el laboratorio como en el aula.

Comunidad de práctica

Como la premisa de este trabajo es que el salón de clase es una comunidad de aprendizaje, o una comunidad de práctica, el propósito del análisis era ver cómo y cuándo cada uno de los tres aspectos, definidos por Wenger (2002) se manifestaban en las interacciones del aula.

INTERESES COMPARTIDOS. El desarrollo de los intereses compartidos es dependiente de una construcción efectiva del conocimiento común y del desarrollo de las habilidades de aprendizaje colaborativo. La discusión anterior ha presentado los logros y las limitaciones de cada una de las clases de María. Sólo hubo un ejemplo claro de una experiencia verdadera de colaboración, que fue cuando ella describió cómo había puesto a los estudiantes a escribir preguntas en equipo para hacer una revisión de un tema. En este ejercicio tenían que responder las preguntas de otros equipos y hacer correcciones de los demás equipos y del suyo propio (P7: 229-272). Este fue un caso interesante de transferencia de una estrategia del segundo año de TACTICS al salón de clase, pero sin una intención consciente, como María describió esta actividad, sino como algo que se le "ocurrió", "una inspiración". Este también fue el único caso de un desarrollo activo de interdependencia positiva y de compromiso, paralelo al entusiasmo de los estudiantes, un factor adicional que Wenger (2002) mencionó cuando describió una comunidad de práctica. Además, esta actividad les dio a los estudiantes la posibilidad de establecer una comunicación verbal entre sus pares, con frecuencia no observada en otras clases y que les permite practicar su nuevo lenguaje científico (Lemke, 1997; Wells, 2000). También fue uno de los pocos ejemplos en el que los estudiantes supuestamente habrían practicado la escritura usando el lenguaje científico, al menos en un nivel más creativo que en el tener que copiar las respuestas de un texto, como regularmente lo hacían para responder preguntas. Además, María hizo comentarios sobre el aspecto positivo del trabajo en equipos, en términos de ejercer una presión par a par entre los estudiantes: todos deben trabajar ya que sólo reciben una calificación por grupo (P7: 48); esto fomentó una mayor participación y una responsabilidad compartida.

Era evidente que en las clases de María existía un acuerdo implícito de una aproximación común hacia el trabajo; que los estudiantes habían aceptado su estrategia de hacer que buscaran las respuestas correspondientes a las preguntas, más que conformarse con el dictado de notas, tal como lo hacían muchos otros maestros en la escuela. También hubo una aceptación casual y compartida sobre la plática y movimiento de los estudiantes durante la clase, aunque virtualmente todos volvían a poner atención cuando había que copiar algunas notas. El objetivo implícito de la toma de notas era claro: estas preguntas cubrían el conocimiento "legítimo" que los estudiantes tenían para aprender y así obtener buenas marcas en sus exámenes semestrales.

En el transcurso de las clases, María estaba constantemente reforzando la responsabilidad individual de los estudiantes en el desarrollo de sus trabajos, paseándose por la clase para ver que todo estuviera bien, y después les pedía a diferentes alumnos sus respuestas o comentarios sobre las respuestas de otros compañeros, incrementando así una participación activa en su propio aprendizaje. Su rol como administradora experta del conocimiento legitimizado era evidente, incluso en el proceso de que los estudiantes buscaran información básica en los textos que ella escogía. Todas estas estrategias ilustraron bastante su estrecho control sobre todos los aspectos de la clase, así como la coherencia global de sus prácticas con sus creencias sobre el aprendizaje.

Relaciones de funcionamiento interno y de construcción. Las clases de María reflejaban la ideología dominante de la escuela, donde la relación general para la resolución de problemas era tácita entre cada estudiante y la maestra, ya que cada alumno era responsable de su propio trabajo y aprendizaje. Había poco compromiso mutuo de los estudiantes o de las responsabilidades compartidas para el aprendizaje de cada uno, aparte del ejemplo que mencionamos anteriormente, en donde escribieron juntos las preguntas del examen. El trabajo en equipo entre los estudiantes no era normalmente promovido de distinta forma que en el laboratorio, aunque había apoyo de equipo para asegurarse de que todos tuvieran las respuestas "correctas" cuando las discutían juntos, escribiéndolas en el pizarrón para que todos las pudieran ver. Esto permitía un grado muy superficial de negociación del conocimiento cosificado, pero estaba estrechamente controlado por la maestra y aceptado por los estudiantes.

Uno de los intereses de María, como se mencionó anteriormente, era incluir a los estudiantes marginados en las actividades de clase. Ella desarrolló su propia estrategia, que describió como tomar el rol de una "tía". Ella sentía que los estudiantes estaban desinteresados debido a la falta de atención por parte de los maestros en las clases anteriores, una experiencia que ella misma había vivido y jurado no repetir con sus propios estudiantes. Esto mostraba tanto las raíces de experiencia de su práctica (Shön, 1983) como una "ética de cuidado" (Ritchie y Rigano, 2002). María se consideraba razonablemente exitosa para motivarlos a trabajar, particularmente porque creía que los estudiantes pobres o desinteresados sólo les faltaba motivación, y que necesitaban poner más esfuerzo para aprender sin problema. Esta creencia distribuyó la responsabilidad para el aprendizaje entre la maestra y los estudiantes, con su rol inicial de motivadora o facilitadora, pero dejando que los alumnos, en primera instancia, fueran los responsables de su propio aprendizaje. María activamente promovió la participación de ellos con el propósito de que se volvieran menos marginados, que se pudieran mover de su posición periférica a una más central (Lave y Wenger, 1991). A través de sus esfuerzos, estos estudiantes se vieron forzados a practicar verbalmente su lenguaje científico, aunque sólo fuera en una ocasión.

A lo largo del estudio, hubo algunas mejoras en los niveles de interacción y en las relaciones con los alumnos, pero todo esto fue iniciado y controlado por la maestra. Podríamos inferir sólo un nivel mínimo de negociación de los significados científicos durante los procesos de enseñanza-aprendizaje, y con respecto a la aptitud, ésta parecía reducirse a complacer a la maestra y a obtener buenas calificaciones (Wenger, 1998, p. 269), ya que había pocas oportunidades para el desarrollo activo de las relaciones semánticas, esenciales en una clase de ciencia efectiva (Lemke, 1997).

Conocimiento compartido y desarrollo. Anteriormente hemos analizado la "ruina de marco" inicial entre los nuevos estudiantes y María, cuando encontraron su estilo de enseñanza muy sorprendente. Sin embargo, ella describió su aceptación eventual e incluso la apreciación de él, indicando el desarrollo de un repertorio compartido, aceptado, en términos de un estilo de enseñanza-aprendizaje. Esto incluía a los mecanismos mutuamente comprendidos y compartidos, tales como el uso de las fotocopias, el tipo de trabajo en el pizarrón y el estilo del discurso. Durante el semestre, María y sus estudiantes desarrollaron una historia compartida y normas de conducta que implicaban ciertas negociaciones tácitas de temas seleccionados y cómo cubrirlos. Como Rogoff (1998) sugirió, este tipo de colaboración, en términos de organización de tiempo y recursos, es frecuentemente observada entre los maestros y los estudiantes, incluso en las escuelas más tradicionales. Por ejemplo, en una clase observada (Pl), María les había pedido una tarea pero muy pocos la habían hecho, mientras que el resto argumentaba que a ellos no se les había dicho. Esto pasaba con frecuencia, era una manera de disentimiento estudiantil y una negociación implícita de estrategias que reforzaba la práctica de María de hacer que los estudiantes leyeran y respondieran las preguntas en clase bajo su control. Sin embargo, esto obstaculizó las estrategias intencionadas de María para desarrollar el conocimiento por medio de las discusiones de los estudiantes, ya que el tiempo valioso de la clase estaba dedicado a la lectura.

Había muy poca evidencia de conocimiento compartido, en términos de las experiencias de los estudiantes. María describió su objetivo de aprendizaje intencional, de desarrollar una ecología de actividades para transformar la información en conocimiento, aunque las actividades pueden no haber sido suficientes para alcanzar esta meta. Una transferencia de autonomía a los estudiantes no era evidente en las clases normales, ya que la enseñanza no era muy compartida y, de manera esencial, ninguna negociación de los significados del conocimiento científico estaba presente. El rol de la maestra estaba institucionalmente legitimado, haciendo ritualistas las contribuciones de los estudiantes y usualmente ignoradas por sus pares (Wenger, 1998).

Discusión

Los tres marcos de trabajo que hemos empleado en el análisis tienen muchas líneas en común, tales como los objetivos compartidos, la participación, el conocimiento común, el compromiso y la negociación. No obstante, cada focalización ha generado una perspectiva diferente, permitiendo con esto una interpretación total mucho más rica de María como maestra. Nuestro análisis del desarrollo del conocimiento común sacó a la luz a los complejos estratos de las interacciones entre la maestra y los estudiantes dentro del contexto institucional, proporcionando una detallada descripción de lo que podría llamarse, a primera vista, un salón de clase muy tradicional, centrado en la maestra. Aunque el rol de María como maestra varía, hay evidencia de que generalmente cae en las categorías tradicionales que implican el control del maestro sobre el contenido, las actividades y la atención y conducta del estudiante, entre otros. Volveremos a las complejidades subyacentes de esta posición.

María claramente desarrolla un conocimiento común base con cada grupo de estudiantes, pero se trata de uno que no es cuestionado por los alumnos, sin ninguna discusión explícita referente a las metas u objetivos en la clase (Edwards y Mercer, 1987; Henri y Lundgren-Cayrol, 1998). Existen metas implícitamente compartidas del aprendizaje que es trasladado por la maestra y los estudiantes, como en la obtención de buenas calificaciones, una visión que es fuertemente promovida por el contexto institucional. Cuando existe una perspectiva compartida de las responsabilidades de maestro-alumno, ésta se halla más dirigida hacia las cuestiones normativas, tales como cubrir el programa curricular oficial, la asistencia y conducta aceptable en clase, así como pasar todos los exámenes semestrales importantes.

La falta de los objetivos explícitamente mencionados de María puede reflejar su ideología educativa personal de que los estudiantes son individuos que desarrollan su propio potencial y que deberían aprender cosas por sí mismos, así como su creencia implícita de que en última instancia, la responsabilidad para el éxito o el fracaso yace en los estudiantes mismos, en su motivación para el trabajo (Edwards y Mercer, 1987; Lemke, 2001). La ideología institucional general parece apoyar el concepto de aprendizaje como un proceso individual y mecánico, visto como el resultado inevitable de estar en el salón de clase con la maestra. El estatus o legitimidad se da a los textos o al conocimiento de la maestra, mientras que las contribuciones del estudiante sólo son motivadas de manera superficial, en el mejor de los casos.

En diferentes momentos, María ha expresado la importancia de su rol como motivadora de la participación y aprendizaje de los estudiantes. Ella cree que los alumnos deberían discutir ideas, pero reconoce que ella no les da ni un contexto específico ni una estructura para promover esto. Hay niveles variantes con respecto a la participación del estudiante, virtualmente con todo el intercambio verbal controlado por el uso frecuente de ella de las estrategias de enseñanza del IRF, típico de una situación tradicional con la maestra como centro del diálogo (Resta *et al.*, 1999). Es evidente que las interacciones observadas sucedan sin una perspectiva sobre el aprendizaje verdaderamente compartida. Se le da la importancia al marco de referencia de la maestra y a su conocimiento "legítimo", con poca validación de las experiencias y conocimiento de los estudiantes. Virtualmente, no existe una interacción de estudiante-estudiante y una oportunidad mínima para que ellos expresen sus propias ideas. Por lo tanto, la transferencia que ocurre es principalmente la tradicional, la del conocimiento de la maestra para los estudiantes por medio de una seudo-discusión sin la contribución y transferencia de control e incumbencias (Edwards y Mercer, 1987).

El concepto de aprendizaje de María está articulado por su uso de la metáfora de los estudiantes como vasijas por llenar a través de su conocimiento experto (P7: 9), una visión tradicional apoyada por el contexto institucional. María expresa en diferentes momentos dos objetivos principales para sus clases: el del aprendizaje en el sentido pleno del concepto y el de que sus estudiantes pasen exitosamente el curso. Sin embargo, ella parece oscilar entre ambos, y ha reconocido en la discusión informal que no se hallan necesariamente relacionados. A través de las negociaciones tácitas, trata de producir un equilibrio adecuado entre estos dos, cubrir ambos objetivos, pero no parece ser suficientemente explícita para promover el desarrollo de un ambiente de aprendizaje verdaderamente colaborativo. También consideramos que era probable que su conceptualización de lo que significaba aprender o construir el conocimiento sea más bien vaga. De esta manera, se explica su adherencia a las prácticas tradicionales a pesar de su discurso.

Su estudiante ideal es el que pone atención y escucha las explicaciones del maestro (P4: 11), pero que también puede relatar y expresar sus comprensiones, una combinación interesante del estudiante, intelectualmente activo pero físicamente pasivo. Esto refleja una definición del conocimiento de alguna manera más constructivista, considerablemente más allá de la memorización tradicional y de la repetición de hechos aislados.

El estilo de participación del estudiante en las clases de María, generalmente limitado a respuestas de una o dos palabras a sus preguntas, se podría interpretar, en el mejor de los casos, como el de participación muy marginal. También se podría interpretar como una respuesta a las normas implícitas del discurso, establecidas en el sistema escolar por maestros tradicionales que consideran al estudiante como un sujeto pasivo, un recipiente de conocimiento callado. En las clases de María, nosotros consideramos esto como una participación periférica legítima, dado el contexto institucional específico (Lave y Wenger, 1991). Kalman (2004) ha sugerido que éste ha sido el caso en sus estudios sobre escuelas secundarias mexicanas.[10] De todos modos, cualquiera que sea la razón para que los alumnos tengan una participación limitada, nosotros consideramos que la falta de una interacción y discusión estudiantil más significativa sería un obstáculo definitivo para la formación de una comunidad de práctica efectiva, con el objetivo implícito de desarrollar el lenguaje científico y el conocimiento de los estudiantes.

Las intenciones tácticas de María para enseñar biología en lo que solemos llamar "camaradería con los estudiantes" divergen marcadamente de las formales, de las normas estilistas del lenguaje científico (Lemke, 1997) en un intento por hacerlo más comprensible. Esto se puede percibir a través del análisis de datos, en el que María tiene la meta implícita de enseñar a los estudiantes el vocabulario básico para "platicar" de biología mientras permanece en clase, intentando así vincular el uso de la terminología científica

[10] Kalman, Judith (comunicación personal, julio 15, 2004).

a los términos más familiares en la construcción del conocimiento común. Sin embargo, debido a su constante control sobre el discurso, los estudiantes tienen oportunidades muy limitadas para practicar este nuevo lenguaje, e incluso menos para negociar los significados. De esta manera, la intersubjetividad o la construcción del conocimiento común compartido se queda en un nivel superficial (Edwards, 1993; Joiner *et al.*, 2000; Rogoff, 1998; Wells, 1999).

La meta implícita de María sobre su enseñanza es la de introducir a los estudiantes al aspecto biológico del conocimiento del mundo (Scott, 1996). Un objetivo frecuentemente articulado es la presentación de la información biológica actualizada y "correcta", en forma "científica", aun articulada, en la que los estudiantes puedan relacionarla con sus propias vidas (P4). Las estrategias de María incluyen el uso del vocabulario científico y formal en diferentes contextos, intentando con esto facilitar la comprensión del alumno. Ella, algunas veces, recurre a la personificación de los fenómenos biológicos, tales como la "bebida" de agua de una célula (Pl), un intento por presentar el concepto científico de la ósmosis, más cercano para los estudiantes. En otras ocasiones utiliza un toque humorístico que los estudiantes aprecian. Con frecuencia, desarrolla tablas en el pizarrón para comparar y contrastar diferentes conceptos e incluye a lo alumnos en el proceso de construcción del conocimiento común. María no niega el sentido común, ni tampoco las experiencias propias de los estudiantes, sino que más bien intenta hacer que la ciencia sea accesible para ellos, haciendo uso de un estilo informal, al tiempo que trata de "humanizar" el lenguaje científico (Lemke, 1997, p. 148). Este estilo tiende a desmitificar la ciencia, mientras que, por otra parte, su discurso y las estrategias de uso en la exposición y de la discusión controlada reflejan lo que Lemke llama la ideología de la verdad científicamente objetiva (pp. 149-152). Una vez más vemos que María se esfuerza por un estilo más centrado en el estudiante, pero que aún mantiene sus orígenes tradicionales.

Aun cuando no se sabe qué tanto la perspectiva teórica de una maestra del NOS afecta los procesos de enseñanza-aprendizaje, particularmente si las creencias son sostenidas de manera implícita y sin reflexión, se considera que las posiciones epistemológicas influyen las prácticas de enseñanza (Abd-El-Khalick *et al.,* 1999; Lederman, 1999). En el caso de María, hemos visto que sus creencias se inclinan hacia el lado positivista del equilibrio epistemológico, y que sus estrategias de enseñanza también tienen una propensión definida hacia el control verbal de la clase, como lo describió Richardson (1996). Generalmente, su discurso también implica una sola respuesta o solución científica a sus preguntas. Su práctica en el laboratorio demuestra una posición positivista, motivando con esto a que los estudiantes hagan deducciones a partir de sus experiencias y que formulen hipótesis sobre el contenido nutriente de los alimentos que tendrían que poner a prueba más adelante. Así, la maestra asume un método científico infalible para detectar resultados únicos. En contraste, en la misma sesión de laboratorio, ella dice a la clase qué tan importante es para ellos que investiguen y presenten sus propias ideas. La elección actual de María de los temas es controlada por el plan de estudios oficiales, por lo que no es posible valorar este aspecto. Pero ella no tiene la intención de relacionar los conceptos con las experiencias previas de los estudiantes. Este es otro ejemplo de una posición más relativista, demostrando, una vez más, una mezcla ecléctica de perspectivas.

Dentro de la perspectiva del aprendizaje colaborativo, la mejor aproximación a la colaboración entre María y sus estudiantes es su acostumbrada escritura de notas en el pizarrón. Habitualmente, ella toma las respuestas de los alumnos, modificándolas para ajustarlas a su propia agenda, pero incorporando algunas de sus ideas. Esto es, al menos, una legitimación parcial del conocimiento de sus alumnos. Los estudiantes no cuestionan su conocimiento experto, sino que centran sus potenciales de negociación en las reglas de la clase, en tantear si tienen que hacer su tarea, en el uso de los recursos, en la organización del tiempo y en el tipo de participación que deben tener. Rogoff (1998) sugiere este tipo de colaboración entre maestros y estudiantes que, incluso, se puede hallar en la mayor parte de los salones de clase tradicionales centrados en el maestro. Sin embargo, como ya se dijo anteriormente, María ha formado su propio concepto de aprendizaje colaborativo y trabaja, de manera muy coherente, dentro de ese marco.

El análisis también destacó el uso limitado de los instrumentos técnicos colaborativos para la producción mutua del conocimiento compartido. En términos del instrumento psicológico, socialmente mediado de las interacciones habladas, éste tiene un estatus mayor con María para su enseñanza, pero las notas escritas en el pizarrón parecen tener un estatus más grande o un carácter mediado para los estudiantes (Crook, 2000; Edgard, 1993). Ellos parecen interpretarlas como una expresión directa de las expectativas y de la agenda de la maestra, y también del conocimiento legítimo que deben memorizar para pasar los exámenes.

Tanto la clase como el contexto escolar generalmente indican una filosofía muy tradicional sobre la enseñanza y el aprendizaje. Las normas institucionales crean un clima cultural que tiene una influencia marcada en las prácticas de enseñanza-aprendizaje, a tal punto de hacer muy difícil que una maestra como María sea innovadora. Ella es forzada a cubrir el currículum oficial durante un espacio de tiempo reducidamente específico, trabajando con los estudiantes para que puedan salir bien en sus exámenes normales. El hecho de que los alumnos sean participantes renuentes al principio, demasiado bien entrenados en su rol pasivo tradicional, es otro obstáculo que ella tiene que enfrentar. Esto la deja con muy poco tiempo para intentar algunas estrategias más interesantes, en vez de sólo enseñar a memorizar las definiciones biológicas. Una circunstancia ventajosa que hemos podido identificar en este aspecto, es que en esta escuela a los maestros se les da la total libertad para que hagan lo que quieran en sus salones. De esta manera, se les permite organizar su tiempo y actividades como a ellos les ajuste. Sin embargo, el ambiente del compromiso mínimo del estudiante en los procesos de enseñanza-aprendizaje no explota el conocimiento común desarrollado. En lugar de eso, la negociación y la co-construcción del conocimiento común ocurre dentro de los roles tradicionales del maestro/transmisor experto y del estudiante/receptor pasivo. Muchos estudiantes sólo ponen atención cuando existe una manera oficialmente reconocida de presentar el conocimiento, el cual pueden interpretar como necesario para el éxito, es decir, para pasar el examen. Aunque existen los espacios físicos, el clima no promueve el compromiso común productivo, que incluso se podría considerar que obstruye activamente la motivación del potencial de los participantes. Un contexto de este tipo, del que claramente legitima sólo ciertos tipos de conocimiento y de conducta, debe ser considerado como un obstáculo para el cambio (Littleton, 2000).

La parte más rica del análisis ha sido la referente al salón de clase como una comunidad de práctica. Aquí se subrayan muchos aspectos tradicionales, tales como el énfasis en el aprendizaje sobre la materia cosificada, sobre el conocimiento curricular y legítimo de la maestra experta y sobre la evaluación. Casi no hay nada de contexto global en los compromisos ni en las oportunidades para tener un contenido individualizado dentro de la clase, limitándose de nuevo a la negociación y a la transformación de la identidad de maestra y estudiantes, y dándoles muy poca oportunidad para explorar o "cruzar las fronteras". Esencialmente, toda la coordinación es realizada por la maestra, de modo que los estudiantes tienen poca autorización dentro de la clase para negociar o cambiar el curso de las actividades. El contexto institucional promueve esto, autentificando las identidades y dándoles responsabilidad a alumnos y docentes de acuerdo con los grados oficiales, definiendo el éxito-fracaso de esta manera extremadamente limitante y tradicional.

Sin tomar en cuenta el contexto, María ha demostrado la firme convicción de que los estudiantes necesitan "construir" su propio aprendizaje, y ha seguido explorando las estrategias interactivas, un signo de las competencias de desarrollo por parte de la maestra y los estudiantes dentro del salón de clase, aun cuando no hay un reconocimiento formal de esto por parte de la escuela. Ella se ha demostrado a sí misma que ha hecho cambios intuitivos o inventivos en su trabajo durante algunos años, pero las oportunidades imaginativas no han sido compartidas con los estudiantes en clase. A través de estas actividades, involucra a sus estudiantes con su propio aprendizaje, pero es probable que sólo sea en un nivel significativo para ella, puesto que es quien elige las actividades con base en sus propios objetivos implícitos. El rol global de María dentro del salón de clase se ve más como el de una representante institucional que como el de una participante auténtica en la comunidad de práctica (Wenger, 1998), aunque hay intentos indecisos para salirse de este molde. Verdaderamente, su rol en TACTICS se ha mantenido muy marginado, con sólo un ejemplo detectado de una transferencia de estrategia a sus prácticas del aula.

Todo esto nos lleva a inferir un sistema de creencias fuertemente sostenido, aquel que guía a María a través de su laberinto cotidiano de actividades (Bryan y Atwater, 2002), demostrado por un grado notable de coherencia entre muchas de sus prácticas y creencias. Consideramos sus creencias básicas, más estrechamente sostenidas del control del maestro y una concepción esencialmente positivista de la ciencia como los filtros a través de los que ella ha visto, de manera inconsciente, su exposición a los nuevos modelos (Pajares, 1992).

No obstante, hay signos de transformaciones. Sus metas de aprendizaje, su discurso e incluso algunas prácticas reflejan una apropiación de modelos más centrados en el estudiante. Aunque sus conceptos más recientemente formados pueden no ser las definiciones generalmente aceptadas, tal como su concepto de aprendizaje colaborativo, éste sería el fundamento en el que desarrolla lo que concibe como actividades colaborativas. También suponemos que hay una clara evidencia no sólo de sus creencias que la llevan a su práctica, sino de que sus experimentos con las nuevas estrategias la han llevado a ajustar sus creencias, demostrando así la relación interactiva entre los dos campos (Bryan y Atwater, 2002; Richardson, 1996), un proceso gradual de reconstrucción de su modelo de enseñanza y aprendizaje de la ciencia. A partir del análisis, se hace evidente que la conceptualización de María sobre su rol como maestra es una amalgama fascinante, ecléctica, de la transmisión tradicional de su conocimiento experto, con aquel de toque constructivista, interactivo, un modelo que hemos etiquetado como “transmisión activa”.

Comentarios finales

Como en el caso de Ritchie y Rigano (2002) hemos dado voz a una maestra que ha alcanzado un cambio a través de la motivación personal, de sus propias insatisfacciones con las formas tradicionales de enseñanza y aprendizaje. En este caso particular, sin embargo, María inició este cambio dentro de un contexto institucional que era esencialmente incompatible con lo que ella estaba trabajando, en donde no había una cultura de apoyo, colaborativa (con la posible excepción de los investigadores). De este modo, ella era su propio agente para el desarrollo personal, basándolo principalmente en sus creencias y en sus propias experiencias del aula de prueba-y-error; ignorando o superando muchos de los obstáculos institucionales dentro de su contexto de trabajo. Juzgando la descripción de María sobre su búsqueda intuitiva para lograr las mejores estrategias de enseñanza-aprendizaje a lo largo de su carrera, consideramos las contradicciones identificadas entre algunas de sus creencias expresadas y de sus prácticas observadas como indicaciones de una evolución continuada de su concepto sobre la enseñanza y el aprendizaje. Su exposición de los aspectos teóricos de la educación en el MEC dio apoyo a muchas de sus observaciones empíricas, proporcionándole un marco de trabajo dentro del cual ella pudiera trabajar. Las primeras señales sobre la asimilación de las nuevas ideas se encuentran en su discurso, y muchas que aún no se reflexionan están en sus prácticas. Aún no se puede ver si esta evolución llegará a sus prácticas o si se quedará sencillamente en el nivel del discurso, pero nuestro estudio a largo plazo, en el que nos encontramos en las etapas de finalizar, debería darnos más evidencia en este aspecto. Creemos que María ha sido una maestra muy excepcional dentro de un nicho educativo y tradicional, al que hemos considerado representativo de la mayor parte de las escuelas superiores mexicanas.

La intersección de los ejes de los tres marcos de trabajo usados en este estudio, junto con el enfoque específico sobre el discurso científico de María, nos ha llevado a una interpretación mucho más rica de María como maestra de ciencias y nos ha permitido describir los detalles que, de otra manera, no hubieran sido visibles. Consideramos que esta descripción inicial de María ha sido un ejemplo de la riqueza de información obtenible a través del uso de este esquema extenso y explicativo.

Verjovsky, J. y Waldegg, G. (2005). "Analyzing beliefs and practices of a mexican high school biology teacher", *Journal of Research in Science Teaching,* vol. 42 (4): 465-491.

Traducción: Juan Carlos García Palmeros, DIE-Cinvestav.

El acercamiento de Bolzano a *Las paradojas del infinito*: implicaciones para la enseñanza

Resumen: En este trabajo se analizan algunos fragmentos de *Las paradojas del infinito*, obra póstuma de Bernard Bolzano (1781-1848), para mostrar que la solución de Cantor al problema de la definición del infinito actual no es la única posible ni la más natural. De hecho, aun si presentan limitaciones, las soluciones que propone Bolzano para las paradojas del infinito son más intuitivas, sin que ello comprometa su coherencia interna. Las implicaciones para la enseñanza apuntan a la mejor comprensión de las respuestas de los estudiantes cuando está involucrado el infinito actual, ya que es posible establecer un paralelismo entre estas respuestas y el razonamiento de Bolzano.

Introducción

El infinito, en sus distintas manifestaciones, ha tenido un lugar determinante en el desarrollo conceptual de la matemática, provocando, muchas veces mediante consideraciones filosóficas, la búsqueda de niveles cada vez más finos en su fundamentación. Cuando bajo alguna de sus formas el infinito se hace explícito en la matemática, da lugar a una serie de cuestionamientos teóricos y metateóricos que obligan a buscar bases más sólidas para sustentar el conocimiento. La confrontación dialéctica entre los argumentos lógicos y la necesidad de llevar a cabo procesos infinitos y procedimientos aritméticos con cantidades infinitas ha sido fuente de diversos avances en la ciencia. Baste recordar que el infinito fue el elemento esencial en dos periodos críticos de fundamentación de la matemática: el que culminó con *Los elementos* de Euclides y el que se generó en torno de los trabajos de Cantor y, posteriormente, de Russell.

Conceptos tan fundamentales como el de número real, variación y función, entre otros, se han llegado a consolidar a partir de un estudio minucioso del infinito como proceso, como estado o como modo de razonamiento. El cálculo y el análisis, y todas las ramas de la matemática derivadas de ellos, son una sistematización del estudio de los procesos infinitos, por lo que se constituyen en una herramienta poderosa para modelar los aspectos de la realidad física caracterizados por la variación y el cambio.

A lo largo de la historia, filósofos, científicos y pensadores han dedicado una parte considerable de su trabajo a desentrañar los misterios del infinito. Muchos han sido los autores que han escrito sobre el infinito y sus implicaciones, considerando no sólo aquéllas de carácter matemático, sino también las de orden metafísico y teológico. Desde la antigüedad griega, el infinito ha generado numerosos dilemas. Aún cuando Aristóteles no parece apreciar la significación de los argumentos de Zeno,[1] el infinito sí le preocupaba. Una idea suya habría de dominar el pensamiento durante 2000 años y sigue siendo un argumento persuasivo: Aristóteles argumenta en contra del *infinito actual* y a favor del *infinito potencial*. Su idea es que no se puede concebir a los números naturales como un todo. Sin embargo, son potencialmente infinitos ya que para cualquier colección finita siempre se puede encontrar una colección finita más grande.

[1] Véase S. Markin, Zeno of Elea, *Routledge Encyclopedia of Philosophy 9* (Londres, 1998), 843-853.

Si hoy, al comenzar el siglo veintiuno, el infinito es un objeto matemático bien definido y susceptible de ser operado, es gracias a la participación activa, y muchas veces apasionada, de varios de los matemáticos más importantes de todos los tiempos.

El infinito no siempre se incluye explícitamente en los programas de enseñanza de la matemática. Sin embargo, muchos conceptos de la aritmética, el cálculo y el análisis podrían entenderse mejor si se discutieran las diversas formas en que el infinito los subyace. El infinito, potencial o actual, es una construcción intelectual que implica un alto grado de abstracción. No contamos, dentro de la realidad física, con ninguna experiencia que nos permita aceptar o refutar la existencia del infinito y, siendo éste una creación del intelecto humano, está sujeto sólo a los métodos de verificación de la lógica: las consecuencias de su existencia deben ser consistentes con la totalidad de la construcción teórica en la cual está inmerso.

El estado actual de la teoría provee al infinito de una estructura formal inobjetable para la mayoría de los matemáticos, que fue fuente de importantes resultados a lo largo de todo el siglo veinte y lo sigue siendo. Sin embargo, esto no implica que el concepto se haya vuelto más accesible para el estudiante que, por primera vez, se enfrenta a él. De hecho, las estructuras conceptuales del estudiante, construidas a partir de su experiencia finita, no sólo no propician la asimilación del concepto, sino que constituyen un obstáculo para este fin. La tensión que produce en los jóvenes el estudio del cálculo se debe, muy probablemente, al enfrentamiento con nuevos instrumentos en los que está implicado el infinito.

Cuando el estudiante accede por primera vez al estudio del cálculo, se encuentra con que, al lenguaje algebraico con el que estaba, hasta cierto punto, familiarizado se le ha incorporado una nueva operación cualitativamente distinta: el paso al límite. Detrás de una nueva simbología y de una nueva operatividad, aparentemente similar a la que ha empleado hasta ese momento, se oculta todo un nuevo aparato conceptual. El estudiante debe entonces incluir, dentro de su campo cognitivo, el uso de desigualdades y cuantificadores, así como una extensión, en significado y campo de aplicación, de los conceptos de función y número.

Los métodos del cálculo proporcionan una serie de algoritmos soportados por intuiciones básicas, las cuales, mediante un lenguaje algebraico, permiten el tratamiento de situaciones que se resuelven operatoriamente. Estas intuiciones, en ocasiones, son autocontradictorias y sólo pueden ser formalizadas localmente.

La aparición del infinito transforma matemáticamente los problemas. Sin embargo, el profesor trata de construir una especie de "solución continua" entre el lenguaje algebraico y las intuiciones que el estudiante posee. Tal solución, a menudo, no sólo no esclarece la diferencia entre la matemática finita y los métodos del cálculo, sino que la oculta. Por lo tanto, es importante que el profesor entienda los problemas del estudiante confrontado por primera vez con el infinito, y los mecanismos probables a los que acudirá para aprehender el concepto. Para poder entender estos mecanismos, hemos estudiado los trabajos de Bernard Bolzano (1781- 1848), el precursor de la idea de tratar al infinito actual como un objeto matemático.

Revisión del campo

Desde la aparición del artículo de Fishbein, Tirosh y Hess (1979) sobre la intuición del infinito, ha crecido el interés de los investigadores de la educación matemática por abordar el tema del infinito desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos que lo involucran, buscando evidencias empíricas.[2] Sin intención de ser exhaustivos, a continuación presentamos una cronología de algunos trabajos relacionados con el tema que nos ocupa: las paradojas del infinito actual como un problema cognitivo (para una revisión general del campo, véase D'Amore 1996).

[2] En 1997, D'Amore publicó una bibliografía en la que "presenta 280 títulos de trabajos o investigaciones de interés histórico, epistemológico, psicológico, filosófico o didáctico, realizados a partir del año 1951 hasta la fecha de publicación del artículo" (Garbín y Azcárate, 2002, p. 90).

En 1980, Tall publicó un trabajo en el que reportaba los resultados de un estudio sobre la manera en la que se relaciona la infinidad de los números reales con la intuición del infinito, y en 1981, junto con Vinner (Tall y Vinner, 1981b), introdujo los conceptos de "imagen conceptual" y "definición conceptual" para explicar las dificultades en el aprendizaje de los conceptos de límite y la continuidad. En 1983, Duval presentó una interpretación de las dificultades que enfrentan los niños al tratar con conjuntos infinitos, en términos de la imposibilidad de asignar a los objetos matemáticos papeles diferentes (por ejemplo, 4 como un número entero, 4 como cuadrado y 4 como un número par). En 1986, el infinito hizo su aparición en las reuniones del PME (Psychology of Mathematics Education), con la presentación de Falk *et al*. (1986) en la que trataba la forma en la que reaccionan los niños ante el problema de la no existencia del "mayor" número natural. En 1987, Sierpinska (1987) presentó un estudio realizado con estudiantes de humanidades en el que ponía en claro el tipo de problemas que enfrentan ante la conceptualización del límite. Ese mismo año, Waldegg (1987) presentó los resultados de una investigación histórica-epistemológica y cognitiva sobre los esquemas de respuesta del sujeto epistémico y del sujeto psicológico, ante problemas típicos del infinito actual; en 1991, fue publicada una parte de estos resultados (Moreno y Waldegg, 1991) referente a un estudio realizado con jóvenes de bachillerato, en el que se mostró las semejanzas entre los desarrollos históricos y los esquemas de respuesta de los jóvenes ante las contradicciones que surgen al tratar el infinito actual con las intuiciones de los conjuntos finitos.

Más tarde, Tall (1992) publicó un trabajo sobre la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado, abordando las nociones de límite, función, demostración e infinito. Ese mismo año, Tsamir y Tirosh (1992) presentaron en la XVI conferencia del PME un estudio sobre la toma de conciencia de los estudiantes ante ideas inconsistentes. Núñez (1993) hizo una revisión de los aspectos psicocognitivos que subyacen al infinito, y Waldegg (1993b), reportó un estudio sobre la comparación de conjuntos infinitos en jóvenes a quienes se les había dado una capacitación previa basada, no en los conceptos formales sino en sus concepciones intuitivas. Por su parte, Falk (1994) llamó la atención sobre el reto cognitivo que significa la aprehensión del infinito, y González (1995) realizó un estudio con estudiantes hispanos residentes en Estados Unidos sobre las intuiciones del infinito.

En 1997, Mura y Louice abordaron, por primera vez, el problema del infinito en los profesores, tanto en formación como en ejercicio. En 1999, Arrigo y D'Amore estudiaron las respuestas que dan los estudiantes respecto de la equipotencia entre los puntos de un cuadrado y los de uno de sus lados. Garbin (2000) realizó un trabajo sobre el manejo de las inconsistencias que presentan los estudiantes de bachillerato en función de sus esquemas conceptuales del infinito actual. Resultados parciales de esta investigación fueron publicados en Garbin y Azcárate (2000 y 2002). Sobre la línea de las inconsistencias, también han trabajado Tsamir y Tirosh (1992 y 1999).

En 2001, *Educational Studies in Mathematics* dedicó un número (48) a los estudios del infinito, en el que resaltan los artículos de Monaghan y Tsamir sobre las ideas de los jóvenes ante el infinito actual.

En la línea de la perspectiva histórica, Waldegg (1988) revisó la obra de Cantor para formalizar el infinito actual; resumió las formas en las que Aristóteles hace entrar al infinito en la filosofía griega (Waldegg, 1993a) y, posteriormente, presentó algunas consideraciones sobre las concepciones ontológicas de Bolzano arraigadas en una fuerte posición platónica acerca de la matemática, que le impidieron considerar la posibilidad de las geometrías no-euclideanas (Waldegg, 2001). Por su parte, Horng (1995) mostró los puntos de contacto entre la matemática griega y la china sobre el infinito.

Los resultados de estos estudios muestran una gran diversidad de problemas que, a menudo, reproducen la larga historia de conflictos y seducciones que ha enfrentado la humanidad ante esta idea. En particular, entre las paradojas más notables del infinito, aquéllas relacionadas con la equipotencia de un conjunto infinito y sus subconjuntos propios resultan ser de las más recurrentes. Como veremos a continuación, la solución de Cantor a esta paradoja, si bien es asimilada por la matemática moderna, no es la única solución posible.

El infinito como proceso

En los siglos XVII y XVIII, al sistematizarse y generalizarse los métodos del cálculo, el infinito se reflejó en la matemática en forma de *procesos infinitos*. Estos procesos fueron empleados, con amplios rangos de libertad, como un método para llegar a objetos matemáticos cuya existencia estaba prevista por la intuición (como, por ejemplo, el área del círculo). El infinito potencial se hizo presente a través de los procesos infinitos, produciendo abundantes resultados al desarrollarse y generalizarse los métodos del cálculo. Sin embargo, y de la misma manera como ocurrió en la matemática griega, la discusión acerca del infinito actual quedó desplazada al campo de la filosofía.

Una de las características del desarrollo del cálculo en los siglos XVII y XVIII es la búsqueda de algoritmos para los procesos infinitos generados en los contextos geométricos y dinámicos. Estos algoritmos surgen, en buena medida, como una extrapolación del álgebra de los procesos finitos. En este momento, todavía no están presentes los problemas de la convergencia que llevarían más tarde a una reflexión sobre el uso y los resultados de tales procesos. Newton, por ejemplo, en su *Método de series y fluxiones* describe así el principio de generación de las series de potencias:

> […] como las operaciones del cálculo con números son muy semejantes a las del cálculo con variables... me sorprende que no se le haya ocurrido a nadie ajustar la teoría recientemente establecida de los números decimales, a las cantidades variables, especialmente porque este camino está abierto a las más notables consecuencias. Este tratamiento tendrá con el álgebra la misma relación que la teoría de los números decimales tiene con la aritmética común; las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz, se pueden aprender fácilmente de esta última. Así el lector puede ser experto en ambas, álgebra y aritmética, y apreciar la correspondencia entre números decimales y series infinitas de términos algebraicos. Y así como la ventaja de los decimales consiste en que, una vez reducidas las fracciones y raíces a ellos, pueden ser tratadas como en-

> teros; asimismo, la ventaja de las series infinitas es que las expresiones complicadas pueden ser reducidas a series infinitas de términos más simples (Newton, 1671, pp. 33-34).

El párrafo anterior se puede ver como un programa de trabajo, como parte del modelo conceptual que subyace al cálculo de Newton. Las técnicas con indivisibles e infinitesimales y los procesos de sumas infinitas empezaban a probar sus bondades, por lo que, por una parte, tener expresiones algebraicas infinitas no representaba en sí ningún obstáculo y, por otra parte, era deseable poder extender las técnicas del cálculo a todo tipo de expresiones, incluidas las funciones trascendentes.

Los algoritmos generales para el cálculo de áreas y tangentes, y las técnicas de las series infinitas fueron la parte medular de esta aritmética de los procesos infinitos. Al consolidarse el cálculo, los procesos infinitos y toda la operatividad asociada a ellos, adquirieron un lugar indiscutible dentro de la matemática. No así el infinito actual.

La actualización del infinito

Un cambio radical ocurre cuando la discusión acerca del infinito actual entra a la matemática, y cuando se contempla la posibilidad de considerar el infinito como un objeto matemático susceptible de poseer una operatividad propia. Este cambio se inicia formalmente con Bolzano. Aunque ya algunos autores anteriores se habían manifestado a favor de la existencia de un infinito en acto ("Estoy totalmente por el infinito actual...", Leibniz, *Opera omnia*), es en la obra de Bolzano, *Las paradojas del infinito* (1851), en donde se trata este problema de manera más consistente. Cantor reconoce numerosas coincidencias entre el trabajo de Bolzano y el suyo, aunque sus respectivos puntos de vista sobre la comparación de conjuntos en términos de sus relaciones es un punto de divergencia crucial entre ellos. Esto puede observarse en la siguiente cita (para Cantor el infinito actual es el único infinito *genuino*):

> Bolzano es quizás el único que, con cierta amplitud, sitúa a los números genuinamente infinitos en su justo lugar... (Cantor, 1883, p. 78)

Describiremos en detalle el contenido matemático de esta obra de Bolzano ya que supone, en forma embrionaria, los conceptos clave para la "matematización" del infinito y hace evidentes los conflictos que esto entraña para la intuición. En efecto, un análisis del trabajo de Bolzano ayuda a aclarar los conflictos que tales construcciones crean en la intuición.

Los trabajos de Bolzano

Bernard Bolzano (1781-1848) fue un filósofo y matemático cuyas contribuciones no fueron valoradas sino mucho tiempo después de su muerte. Es una figura clave en la lógica, la geometría y la teoría de números reales. En la geometría, trató de resolver los problemas subyacentes al postulado paralelo de Euclides. Bolzano identificó varias fallas en el razonamiento de Euclides pero le fue imposible subsanarlas, ya que le faltaba la herramienta matemática apropiada: la topología. Aún así, definió conceptos geométricos básicos y fue la primera persona en articular el teorema de la curva de Jordan, el cual establece que cualquier curva cerrada simple divide al plano en dos partes. Intentó definir los fundamentos de la teoría de números reales con la finalidad de reconciliar cantidades infinitas –un obstáculo encontrado por sus predecesores. Aun si fracasó en esta tarea, produjo resultados importantes como el teorema de Bolzano-Weierstrass, una definición moderna de función continua y la función no derivable de Bolzano. Además, identificó algunas de las características paradójicas de los conjuntos infinitos. En el campo de la lógica, no sólo intentó colocar a las matemáticas sobre un fundamento lógico, sino que fue más lejos al tratar de situar a todas las ciencias y al pensamiento humano bajo la lógica. Bolzano trata ideas básicas como verdad abstracta, juicio humano y reglas de la ciencia. Hoy en día es considerado uno de los precursores de la lógica.

La definición del infinito: primera aparición de los conjuntos

Las paradojas del infinito inicia con una exposición de motivos: se manifiesta la urgente necesidad de definir el término "infinito" ya que, este concepto está en la raíz de casi todas las situaciones paradójicas que se hallan en la matemática:

> [...] y una refutación satisfactoria de sus aparentes contradicciones es requisito para la solución de problemas muy importantes en otras ciencias como la física y la metafísica (Bolzano, 1851, p. 39).

Bolzano entiende que una manera adecuada de referirse al concepto de infinito es mediante el concepto de *conjunto*. Distingue así entre *agregado*, *conjunto* y *multitud*. Un agregado (*Inbegriff*) es un todo compuesto de elementos bien definidos, por ejemplo en el enunciado "El Sol, la Tierra y la Luna actúan unos sobre otros", el sujeto es un agregado compuesto por objetos bien definidos (Sol, Tierra y Luna) que se concibe como un todo.

Existen agregados que coinciden, en tanto que tienen los mismos miembros y, sin embargo, son distintos bajo ciertos aspectos o bajo ciertas concepciones; estas diferencias las llama Bolzano "esenciales". Por ejemplo, un recipiente y el mismo recipiente roto, aunque tienen los mismos elementos, son distintos si se les considera utensilios para beber. Las bases sobre las que dos agregados se consideran distintos se llaman sus "modos de combinación o arreglo".

A los agregados en los que es indiferente el modo de combinación o arreglo y cuyas permutaciones no producen cambios esenciales, Bolzano los llama *conjuntos* (*Menge*). Mientras que los conjuntos cuyos miembros son individuos de una misma especie, los denomina *multitudes* (*Vielheit*).

Tal parece que Bolzano, al distinguir entre agregado y conjunto, resalta la diferencia entre una colección con cierta estructura y una colección desestructurada. Un conjunto es un agregado que posee cierta característica de la cual se prescinde. En consecuencia, conjunto es una noción más abstracta que agregado. Freudenthal discute estos diferentes tipos de colecciones y sus estructuras subyacentes como una fenomenología, resaltando que, desde el punto de vista didáctico:

> [...] el verdadero problema con los conjuntos es aprehenderlos y reconocerlos abstractamente (es decir, totalmente desestructurados) (Freudenthal, 1983, p. 39).

Regresando a la obra de Bolzano, con el objeto de definir conjuntos finitos e infinitos, propone la siguiente construcción:

> Imaginemos una **sucesión** cuyo **primer** término es un **individuo** del tipo A y cuyos términos siguientes se obtienen, cada uno de su predecesor, mediante la adjunción de un nuevo individuo de la especie A... Entonces, claramente, todos los términos de la sucesión, con la excepción del primero, que es un **mero individuo** de la especie A, serán **multitudes de la especie A**. Tales multitudes las llamo **finitas** o **contables** o más específicamente **números enteros;** bajo esta última denominación se considerará el primer término (Bolzano, 1851, p. 43).[3]

Sobre este párrafo, resultan pertinentes varios comentarios. En primer lugar, hay un principio de generación de un conjunto (el de los números enteros) a partir del 1 y mediante el empleo del "sucesor". Después, cada elemento del conjunto se concibe como una multitud finita, es decir, cada número se piensa como formado de unidades mediante un procedimiento bien establecido, a saber, el de tomar sucesor. Sin que se mencione explícitamente, tenemos aquí una construcción *inductiva* del conjunto de los números naturales, que nos da modelos de las colecciones finitas. Tiempo después, Cantor habría de introducir esta construcción en su artículo de 1895 *Contribuciones a la fundación de la teoría de números transfinitos* ([498], §5, p.97-99). Este artículo, conocido como *Beiträge*, define los números

[3] Las negritas en las citas de Bolzano provienen del original.

cardinales tanto finitos como transfinitos, con la finalidad de establecer un fundamento para la teoría de conjuntos.

> Este modelo de construcción permite a Bolzano definir una colección infinita: En particular, la serie puede tener tantos términos que no pueda tener **último término**... Propongo el nombre de **multitud infinita** para aquella constituida de tal forma que toda multitud finita represente sólo una parte de ella. (Bolzano, 1851, p. 44).

Aquí se define el concepto "conjunto infinito" (cuyos elementos son todos de la misma especie) a partir de "conjunto finito", pero no a la manera tradicional de definir lo infinito como la negación de lo finito. La posición de Bolzano es que para hablar del infinito hay que hacerlo a través de conjuntos infinitos. Es decir, el infinito es un atributo de los conjuntos: los conjuntos "sostienen" la noción de infinito. Hay en esta posición un esclarecimiento del origen común de la teoría general de conjuntos y del tratamiento matemático del infinito actual, pues el infinito actual no puede existir sino como un atributo de una colección (infinita). Cantor establecería esta noción más tarde en su artículo *Contribuciones a la fundación de la teoría de números transfinitos* (Cf. 103-105).

En este punto, Bolzano se ve en la necesidad de argumentar en favor de las cantidades actualmente infinitas, refutando otras concepciones del infinito, tanto de filósofos como de matemáticos. Un párrafo particularmente interesante es el siguiente:

> Una cantidad **verdaderamente infinita** [...] no necesita, por ningún motivo, ser variable [...] Recíprocamente, es muy posible que una cantidad que pueda tomar un valor mayor que cualquier cantidad (finita) preasignada, permanezca siempre finita, lo cual sucede en particular con cualquier cantidad numérica 1, 2, 3, 4... (Bolzano, 1851, p. 45).

En estos pasajes Bolzano se refiere al infinito actual como un atributo de una multitud dada, y a la imposibilidad de pensar en el infinito como un sustantivo; es necesario pensarlo como atributo (calificativo) de algunas colecciones.

Por otra parte, Bolzano descarta la manera "incorrecta" de pensar en el infinito como sinónimo de lo no-acotado. La versión matemática más usual de esta situación se da en la consideración de "una variable cuyo valor crece sin límite". Según Bolzano, esto es un error pues *"una cantidad variable no es propiamente una cantidad"*, sino sólo la idea de cantidad que en sí encierra un conjunto infinito de valores. Lo que en realidad es infinito es la colección de valores que se pueden asignar a la variable.

Otra definición objetada por Bolzano es la de Spinoza, compartida también por otros filósofos y matemáticos, según la cual *las cosas infinitas son incapaces de ser incrementadas*. Como contraejemplo de esta concepción Bolzano presenta la idea de una semirrecta (infinita) que se incrementa (infinitamente) al prolongarse desde el extremo limitado.

Tampoco la concepción del infinito como *lo que no tiene fin* parece satisfactoria. Entendido "fin" en un sentido amplio como "límite", se pueden exhibir objetos, como un punto de tiempo o de espacio que no tiene nada que se pueda llamar un límite y que, sin embargo, no es infinito. Y, por otro lado, hay cosas que están limitadas y que pertenecen a la categoría de infinito, como por ejemplo, el espacio entre dos rectas paralelas infinitas.

La existencia de conjuntos infinitos

El siguiente paso en la argumentación de Bolzano es el de mostrar que efectivamente existen conjuntos infinitos, es decir, discute la "existencia objetiva" del infinito:

> Ahora que ya nos hemos puesto de acuerdo en cuanto al concepto de infinito y los elementos que entran en la articulación de esta idea, la siguiente pregunta para ser considerada es la concerniente a su **existencia objetiva**, esto es, si existen objetos a los cuales se les pueda aplicar esta característica, o si existen conjuntos que puedan ser considerados infinitos en el sentido

> aquí declarado. (…) Me aventuro a contestar con una decidida **afirmación** […] **El conjunto de todas las proposiciones y verdades absolutas** claramente se puede ver que es infinito (Bolzano, 1851, p. 50).

A continuación, Bolzano revela un método general de construcción de conjuntos infinitos (método inductivo) y da, además, el criterio para demostrar que el conjunto así construido es infinito: estableciendo una correspondencia biunívoca entre tal conjunto y los números enteros:

> […] si fijamos nuestra atención en una verdad cualquiera tomada al azar, digamos la proposición "existen verdades", la llamamos A, encontramos que la proposición compuesta por las palabras "A es verdadera" es distinta de la proposición A, puesto que A es el sujeto de la nueva proposición. A la nueva proposición la llamamos B. A continuación podemos formar la proposición "B es verdadera" y continuar de este modo generando una lista de proposiciones sin fin […] la semejanza entre la construcción de este conjunto y la del conjunto de los números enteros consiste en el hecho de que a cada miembro del primero le corresponde un miembro del último; en el hecho de que no importa qué tan grande se elija un entero, existe un conjunto con ese mismo número de proposiciones; y, finalmente, en el hecho de que siempre podemos continuar la construcción de tales proposiciones, o más bien, que tales proposiciones existen aunque no se construyan. Se sigue entonces que el conjunto de todas estas proposiciones posee una multiplicidad que sobrepasa cualquier entero (finito) y, por lo tanto, es un conjunto infinito (Bolzano, 1851, p. 51).

Más adelante (p. 57) Bolzano afirma que el argumento descrito en el pasaje que acabamos de citar es suficiente para considerar "demostrada y defendida" la existencia de conjuntos infinitos, en particular el conjunto de los números enteros. Menos de cuarenta años después de la publicación del libro de Bolzano, Richard Dedekind en su ensayo *La naturaleza y significado de los números* demuestra el teorema de existencia de "sistemas infinitos", usando exactamente la misma idea (Véase Dedekind, 1888, p. 64).

Son varias las semejanzas entre los patrones de respuesta detectados en los estudiantes y los que se reflejan en los argumentos de Bolzano (véase Waldegg, 1987 y Moreno y Waldegg, 1991). Por ejemplo, ante la pregunta *¿por qué es infinito el conjunto de los enteros?* Frecuentemente los estudiantes responden *"porque cada entero tiene su sucesor"* como un argumento suficientemente fuerte para asegurar la infinitud del conjunto. Las razones de Bolzano van en la misma dirección. Asimismo, muchos estudiantes basan la decisión de si un conjunto dado es infinito en la posibilidad de establecer una correspondencia uno-a-uno con el conjunto de los enteros positivos. Este criterio, como se puede ver, es también el adoptado por Bolzano.

Las paradojas

La primera *paradoja del infinito* que aparece en la matemática, dice Bolzano, se refiere a la infinitud de los números naturales, ya que,

> [...] si cada número, por definición, es un conjunto finito, ¿cómo puede ser infinito el conjunto de todos los números? Si contemplamos la serie de los números naturales
>
> 1, 2, 3, 4, 5, 6,...,
>
> nos daremos cuenta que los números que se encuentran entre el primero de la serie (la unidad) y uno particular cualquiera, forman un conjunto que es numerado por ese número particular [...] Consecuentemente, el conjunto de **todos** los números debe ser numerado por el **último** número, y siendo entonces él mismo un número, no puede ser infinito (Bolzano, 1851, pp. 57-58).

Bolzano resuelve la aparente contradicción argumentando que no hay ningún entero que ocupe el "último lugar" de la sucesión ya que el principio de construcción de los enteros garantiza la existencia del sucesor de cualquier número. Esta paradoja habría de resurgir dentro de la teoría cantoriana de conjuntos al considerar el número ordinal correspondiente al conjunto de todos los números ordinales.

Dado que el punto de vista de Bolzano con respecto a la existencia del infinito actual es esencialmente novedoso, la obra abunda en argumentos que sustentan esta concepción. En otro párrafo de *Las paradojas*, Bolzano se anticipa a quienes pudieran argumentar que no existen conjuntos infinitos por la simple razón que en un conjunto infinito nunca podrían reunirse todos los posibles elementos para formar un todo, ni siquiera en el pensamiento. Bolzano refuta este razonamiento diciendo que se apoya en la concepción errónea de que para construir en el pensamiento el conjunto cuyos elementos son a, b, c, d, ... debemos primero concebirlos a cada uno separadamente. Más bien, continúa Bolzano, lo que es cierto es que podemos imaginar el todo sin formarnos una representación por separado de cada uno de los elementos del conjunto; como cuando imaginamos el conjunto de "los habitantes de la ciudad de Praga" sin que para ello debamos representar a cada uno. En conclusión, Bolzano resalta una característica básica en nuestro concepto de conjunto: el conjunto como un objeto *sincrético*. A continuación afirma:

> [...] tan pronto como poseemos una representación A que representa a los objetos a, b, c, d, [...] y no a otros, es extremadamente fácil llegar a una representación del **agregado** de todos estos objetos tomados juntos. No se necesita más que combinar la idea denotada por la palabra **agregado** y la noción A en la forma expresada por las palabras **"el agregado de todos los A".** Esta observación levanta las objeciones posibles contra la idea de un conjunto infinito: siempre y cuando sólo esté presente un concepto específico (A) bajo el cual podamos distinguir a los miembros y a los no-miembros del conjunto.... (Bolzano, 1851, p. 52).

El pasaje anterior contiene una sorprendente anticipación del "axioma de especificación" de la teoría de conjuntos (también llamado axioma de comprensión): Dada una proposición P (x) que se refiere a x y un conjunto X, podemos formar el conjunto Y = {x e X/ P(x) es cierta}.

La comparación y el establecimiento de un "orden" entre conjuntos infinitos es una de las principales preocupaciones de Bolzano. Alrededor de este punto, Bolzano identifica otra más de las paradojas que constituye "una de las características más notables de los conjuntos *infinitos*":

> Dos conjuntos pueden estar en una relación en la que es posible acoplar cada miembro del primer conjunto con algún miembro del segundo de tal manera que, por una parte, ningún elemento de los conjuntos quede sin acoplarse, y por otra parte, ninguno de ellos aparezca en dos o más acoplamientos...

Sin embargo, Bolzano observa que estos mismos conjuntos pueden, al mismo tiempo, presentar otro tipo de relación, lo que constituye la diferencia decisiva entre los criterios de Bolzano y Cantor para la comparación de conjuntos infinitos.

> [...] uno de los dos conjuntos puede contener al otro como una parte de sí mismo, de tal manera que las multiplicidades a las que se reducen, cuando vemos todos los miembros como individuos intercambiables, pueden estar en las más variadas relaciones... (Bolzano, 1851, pp. 64-65).

Para Bolzano, el criterio obvio para comparar dos conjuntos se debe basar en el segundo tipo de relación, es decir, en la relación parte-todo entre los conjuntos. Para reforzar su argumento, presenta varios ejemplos, tomemos uno:

> [...] el conjunto de cantidades (números reales) entre 0 y 5 es claramente infinito, lo mismo que el conjunto de cantidades entre 0 y 12. **Por supuesto, el segundo conjunto es mayor que el primero; en realidad, éste es sólo una parte de aquél** [...] si x denota cualquier cantidad entre 0 y 5 y si fijamos la razón entre x y y mediante la ecuación "5 y = 12 x", entonces y es una cantidad entre 0 y 12, y recíprocamente, dada la cantidad y entre 0 y 12, la cantidad x estará entre 0 y 5 (Bolzano, 1851, p. 65).

Claramente, la ecuación establece una correspondencia uno-a-uno entre los dos conjuntos; sin embargo, concluye Bolzano, del solo hecho que dos conjuntos A y B estén relacionados de manera que, *mediante una regla*, a cada miembro de A le corresponda un miembro de B y recíprocamente, nunca justifica el que concluyamos *la igualdad de sus miembros cuando estos son infinitos* (p. 67).

Señalemos aquí un hecho crucial: para Bolzano dos conjuntos abstractos pueden estar en correspondencia uno-a-uno entre ellos y sin embargo esto no significa que sean equinumerosos porque bien puede ocurrir que uno de ellos esté contenido como subconjunto propio del otro. La posibilidad de establecer una correspondencia uno-a-uno aparece como una característica (paradójica) de los conjuntos infinitos que, a pesar de esto, pueden no ser equinumerosos. Esta posición distingue definitivamente los trabajos de Bolzano y Cantor. Para Cantor (al igual que para Dedekind), la relación parte-todo define a los conjuntos infinitos y el "tamaño" (y orden) de los conjuntos infinitos se basa en su cardinalidad, una medida del "número de elementos" de un conjunto. Si es posible establecer una correspondencia uno-a-uno entre dos conjuntos, entonces éstos tienen la misma cardinalidad y, por ende, son equivalentes.

Evidentemente, la situación paradójica que rodea la comparación de conjuntos infinitos es una preocupación central en esta obra que se puede apreciar en el siguiente párrafo:

> Estoy lejos de negar que un aire paradójico rodea estas afirmaciones. Su origen hay que buscarlo en la circunstancia de que la relación mencionada entre dos conjuntos, en términos de acoplamientos, realmente es suficiente, en el caso de conjuntos finitos, para establecer la perfecta equimultiplicidad de sus miembros [...] Se crea entonces la ilusión de que esto mismo debe cumplirse cuando los conjuntos son infinitos (Bolzano, 1851, pp. 67-68).

Hemos mencionado ya que uno de los principales obstáculos para conceptualizar los conjuntos infinitos surge del hecho de que nuestros esquemas intelectuales, estructurados a partir de una experiencia finita, simplemente se extienden y extrapolan, de tal manera que los conjuntos infinitos reciben el mismo tratamiento que los finitos. Por ejemplo, recordemos el argumento de Salviati en *Dos nuevas ciencias* de Galileo:

> Salviati: Esta es una de las dificultades que sobrevienen cuando intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir el infinito, asignándole aquellas propiedades que damos a lo finito y limitado... (Galilei, 1638, p. 31).

Bolzano se percata de este hecho pero sólo parcialmente, ya que no acepta extender el criterio de la biyección para establecer la equinumerosidad entre dos conjuntos infinitos pero, sin embargo, la relación parte-todo sí le permite afirmar que uno de los dos conjuntos es mayor que el otro, tal y como sucede con los conjuntos finitos.

Sobre la predominancia de un criterio de especificación sobre la numerosidad aún en presencia de una biyección entre conjuntos infinitos, veamos lo que dice Bolzano:

> [para asegurar que dos conjuntos infinitos son iguales] es insuficiente que se puedan aparear los términos de uno con los del otro... La conclusión no será posible a menos que **los dos conjuntos tengan idénticos términos de especificación...** si no cuidamos este punto, podemos llegar al absurdo en los cálculos que involucran al infinito (Bolzano, 1851, p. 67).

La aritmética del infinito

Avanzando en el ensayo de Bolzano, encontramos algunos intentos por definir una *aritmética del infinito*, es decir, Bolzano analiza la posibilidad de introducir una cierta operatividad con el infinito, pero al no contar con un concepto que "cuantifique" los conjuntos infinitos, como lo sería la cardinalidad en Cantor, el problema de la aritmetización del infinito queda planteado en términos reminiscentes de la teoría de las proporciones de Eudoxio:

> Debo confesar que la sola **idea** de un **cálculo con el infinito** tiene la apariencia de ser contradictoria, puesto que tratar de **calcular** cualquier cosa significa, después de todo, intentar una **determinación** de ella en términos de número. Pero, ¿cómo podemos esperar la determinación numérica del infinito –ese mismo infinito que de acuerdo a nuestra propia definición se concibe como un conjunto con una infinidad de miembros, un conjunto más grande que cualquier número y por eso mismo incapaz de ser determinado por un dato numérico? Estos escrúpulos se disipan cuando al reflexionar nos encontramos que un cálculo correcto con el infinito no es una determinación numérica de lo que no es numéricamente determinable, sino sólo persigue determinar la razón entre un infinito y otro; algo que en ciertos casos puede hacerse (Bolzano 1851, p. 78).

Dos hechos sobresalen en este párrafo: en primer lugar, cuando Bolzano habla de determinar la razón entre un infinito y otro, está aceptando que existen infinitos distintos; esta posición es esencialmente diferente a la de sus antecesores, en particular a la de Galileo. Recordemos la paradoja de Galileo: en su último trabajo científico, *Dos nuevas ciencias*, hace dos enunciados aparentemente contradictorios sobre los números enteros positivos. Primero, que algunos números son cuadrados perfectos, mientras que otros no lo son; luego entonces, todos los números, incluyendo los cuadrados y los no-cuadrados, son más numerosos que sólo los cuadrados. Y sin embargo, para cada cuadrado hay exactamente una raíz cuadrada, y para cada número hay exactamente un cuadrado; luego entonces, no puede haber más de los unos que de los otros. Galileo concluye que los conceptos de menor, igual y mayor se pueden aplicar únicamente a los conjuntos finitos y que no tienen sentido en el contexto de los conjuntos infinitos. En efecto, en *Dos nuevas ciencias*, Salviati continúa su argumento contra el tratamiento del infinito por una mente finita (véase cita previa):

> —pero pienso que esto es incorrecto, pues no podemos decir de las cantidades infinitas que sean la una mayor o menor o igual que la otra (Galilei, 1638, p. 31).

En segundo lugar, Bolzano abandona definitivamente la idea de definir la equinumerosidad de conjuntos en términos de una relación uno-a-uno, una noción que en Cantor será medular, para plantear el problema de la aritmetización del infinito en términos de una teoría de proporciones.

Según Cantor, en el trabajo de Bolzano:

> [...] faltan tanto el concepto general de **potencia** de un conjunto, como un concepto preciso de **número de elementos** [...] ambos aparecen en forma germinal en varios lugares [...] pero **no** los trabaja con suficiente claridad, [...] lo cual explica varios errores contenidos en este valioso ensayo (Cantor, 1883, p. 78).

Es interesante ilustrar con algunos ejemplos el tipo de operaciones con el infinito que propone Bolzano. Veamos el siguiente ejemplo, tomado de *Las paradojas* y situado en el terreno numérico:

> Si escribimos la sucesión de los números naturales en la forma
>
> $$1, 2, 3, 4, \ldots, n, n + 1, \ldots \text{ in inf.}$$
>
> entonces el símbolo
>
> $$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1) + \ldots \text{ in inf.}$$
>
> representará la suma de estos números naturales; y el símbolo
>
> $$1^o + 2^o + 3^o + 4^o + \ldots + n^o + (n + 1)^o + \ldots \text{ in inf.}$$
>
> cuyos sumandos son todos unidades, representará el conjunto (totalmente desestructurado) de todos los números naturales. Si denotamos este último por N_o, tenemos la ecuación simbólica
>
> $$1^o + 2^o + 3^o + 4^o + \ldots + n^o + (n + 1)^o + \ldots \text{ in inf.} = N_o \qquad (1)$$
>
> y si denotamos el conjunto de números naturales desde $(n + 1)$ por N, construimos la ecuación simbólica
>
> $$(n + 1)^o + (n + 2)^o + (n + 3)^o + \ldots \text{ in inf} = N \qquad (2)$$

restando, tenemos la ecuación irreprochable

$$1^o + 2^o + 3^o + 4^o + \ldots + n^o = n = N_o - N \qquad (3)$$

de donde concluimos que dos cantidades infinitas pueden tener una diferencia finita. Si, por el contrario denotamos la cantidad que representa la suma de todos los números naturales por S_o, o escrito en forma simbólica

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1) + \ldots \text{ in inf.} = S_o \qquad (4)$$

no tendremos duda en aceptar que S_o debe ser mucho mayor que N_o; pero nos sería menos fácil establecer exactamente la diferencia entre estas dos cantidades infinitas o aún su razón geométrica. Porque si tratamos de escribir la ecuación

$$S_0 = \frac{N_0 (N_0 + 1)}{2}$$

por analogía con el caso finito, (...) no podemos validarla, ya que no tiene sentido hablar de una serie infinita con último término con valor N_o… Sin embargo, de la ecuación (4) podemos obtener, multiplicando por N_o

$$1^o N_o + 2^o N_o + 3^o N_o + \ldots + n^o N_o + \ldots \text{ in inf.} = N_o^2$$
$$1^o N_o^2 + 2^o N_o^2 + 3^o N_o^2 + \ldots + n^o N_o^2 + \ldots \text{ in inf.} = N_o^3$$

lo cual nos convence de que existen cantidades infinitas de órdenes superiores, tales que unas exceden a las otras una infinidad de veces. La existencia de cantidades infinitas que se hallan en una razón dada, racional o irracional, digamos a $\alpha : \beta$, se sigue del hecho de que si N_o denota cualquier cantidad constante infinita, entonces αN_o y βN_o constituyen un par de cantidades que también son infinitas y se hallan entre ellas en la razón $\alpha : \beta$ (Bolzano, 1851, pp. 78-80).

Aunque Bolzano insiste en que sus representaciones son meramente simbólicas, no podemos pasar por alto el hecho de que está asignando símbolos precisos y, en cierta forma cuantificados, a los distintos órdenes de infinito. Sin duda éstos son los precursores de los *alef* de Cantor, ya que el N_o está asociado con el conjunto de los números naturales concebido como un todo de unidades idénticas e indistinguibles; hasta este momento, ésta es la idea más cercana a la cardinalidad del conjunto.

Cuando Bolzano analiza conjuntos infinitos de números reales establece un criterio "métrico" de comparación al identificar los números reales con los puntos de la recta. En este sentido, la distancia entre dos puntos es una medida del tamaño del conjunto de puntos (y de número reales) contenido entre ellos. Veamos el siguiente ejemplo que presenta Bolzano:

> No es menos evidente que el conjunto de las cantidades que se hallan entre dos dadas, digamos 7 y 8, depende sólo de la distancia 8 - 7 y, por tanto, será necesariamente igual a cualquier otro cuya distancia sea igual –y esto a pesar de que es un conjunto infinito y por tanto imposible de determinar por medio de un número, no importa qué tan grande éste sea–. Bajo esta hipótesis y denotando el conjunto de todas las cantidades entre a y b por:
>
> $$\text{mult}\ (b-a)$$
>
> debe haber ecuaciones no-numéricas de la forma
>
> $$\text{mult}\ (8-7) = \text{mult}\ (14-13)$$
>
> y también de la forma
>
> $$\text{mult}\ (b-a) : \text{mult}\ (d-c) = (b-a) : (d-c)$$
>
> contra cuya validez no hay objeciones fundadas [...] Lo anterior valida

la posibilidad de calcular con el infinito (Bolzano 1851, pp. 80-81).

Los conjuntos de puntos bajo la concepción de Bolzano, están cargados de significado geométrico. La percepción de las características geométricas de las regiones asociadas a un conjunto dado resulta determinante para establecer el orden de magnitud que Bolzano atribuye a dicho conjunto; el siguiente es un ejemplo claro de ello:

> Sea E el conjunto de puntos que se hallan entre a y b, incluidos éstos, y sea el segmento ac un segmento de longitud n tomando ab como unidad. El conjunto de puntos del segmento ac, incluidos sus extremos, será entonces igual a nE - (n-1). El conjunto de puntos de la superficie de un cuadrado de lado 1, incluyendo su periferia, será igual a E2 [...] El conjunto de puntos del volumen de un cubo de lado 1, incluyendo la periferia será E3. [...] Debemos atribuir a una recta bilateralmente una longitud infinita y un conjunto de puntos infinitamente más grande que el conjunto de puntos del segmento unitario E (Bolzano, 1851, p. 134).

A este respecto, recordemos las respuestas que dan los estudiantes ante la comparación entre los conjuntos de puntos de dos segmentos de diferente longitud y de un segmento y la superficie de un cuadrado (véase por ejemplo Waldegg, 1987, 1993b y 1996, y Arrigo y D'Amore, 1999) que reflejan una concepción semejante a la de Bolzano en el sentido de que las características geométricas de las figuras en cuestión determinan el "tamaño" de los conjuntos de puntos asociados a ellas. Los estudiantes suelen centrar su atención en aspectos métricos, estableciendo una proporcionalidad directa, a la manera de Bolzano, entre cantidad de puntos y medida.

Reflexiones finales

Hemos querido mostrar, con cierto detalle, la obra de Bolzano porque, por una parte, representa una ruptura con las concepciones anteriores acerca del infinito que preludia el tratamiento cantoriano de los conjuntos y de los números transfinitos, al igual que la teoría de números de Dedekind. Y, por otra parte, permite apreciar ciertas coincidencias entre sus respuestas y las de los estudiantes detectadas en varios estudios experimentales.

A lo largo de este trabajo, hemos señalado algunos puntos de coincidencia entre el desarrollo del concepto en el individuo y en la historia. De ninguna manera pretendemos con esto demostrar que existe una recapitulación de la filogénesis en la ontogénesis.[4] Las discusiones sobre esta tesis histórico-pedagógica "deben ser promovidas entre historiadores, epistemólogos, psicólogos, antropólogos y educadores de la matemática" (Furinghetti y Radford, 2002, p. 650). Nuestro objetivo es tan sólo el de identificar los patrones de razonamiento de eminentes matemáticos del pasado que son homólogos a los del estudiante de hoy, y que no siempre son detectados por el profesor. Dicho análisis ayudará a los investigadores y educadores de la matemática a diseñar mejores estrategias para aprehender conceptos relacionados con el infinito.

Los diferentes esquemas de respuesta en el marco de la historia corresponden a niveles crecientes de abstracción y generalidad en el desarrollo del concepto. Cada nivel supone la reorganización y reestructuración de los conocimientos alcanzados en los niveles precedentes, logradas a través de una constante interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento.

Ésta es una llamada de atención al maestro, no para que reproduzca en sus estrategias didácticas las respuestas dadas en la historia, sino para que comprenda ciertos mecanismos de aprehensión de los conceptos que dan racionalidad tanto a las respuestas de sus estudiantes como a las dificultades a las que se enfrentan. Tratamos de imaginar cómo el estudiante encara el concepto totalmente formalizado de Cantor. Ambas soluciones al problema de la comparación de conjuntos infinitos tienen dimensiones paradójicas: el criterio de Bolzano, basado en la correspondencia parte-

[4] Para una discusión exhaustiva sobre este punto, véase Sfard (1995) y Furinghetti y Radford (2002).

todo, es más "intuitivo" pues es más cercano a experiencias (finitas) concretas (de hecho corresponde al pensamiento prevaleciente en ese momento histórico, y al sentido común de todos los tiempos). Por otra parte, una relación uno-a-uno es menos visible. La solución cantoriana sólo pudo alcanzarse por un desprendimiento total del significado y la intuición y, en ese sentido, representa un corte epistemológico; su solución es por ende más problemática y difícil de entender, pero fue bien aceptada una vez que se probó su potencial en el campo matemático.

El acercamiento de Bolzano fue más intuitivo y "menos paradójico", y pudo así evitar ese corte epistemológico. Sin embargo, resultó ser inviable por la imposibilidad de desarrollar una operatividad satisfactoria. Como le sucedió con sus intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides (véase Waldegg, 2001), Bolzano antepuso su concepción ontológica, basada en la preexistencia de los objetos matemáticos y quiso derivar de ella la naturalidad de los conjuntos infinitos.

Waldegg, G. (2005). "Bolzano's approach to the paradoxes of infinity: Implications for teaching", *Science & Education*, 14: 559-577.

Traducción: Juan Carlos García Palmeros, DIE-Cinvestav.

Objetos matemáticos y la evolución de rigor

Resumen: En este artículo discutimos los orígenes y la evolución del rigor en matemáticas desde la perspectiva de la creación de objetos matemáticos. Proporcionamos algunos ejemplos de los momentos clave en el desarrollo de la matemática que apoya nuestra tesis, a saber, que la naturaleza de los objetos matemáticos es co-sustancial con los desarrollos operacionales que los acompañan y que determinan la normatividad a la que están sujetos.

El desarrollo histórico y la normatividad de los objetos matemáticos

En algún punto de nuestro desarrollo intelectual, la experiencia matemática nos ha llevado a preguntarnos si estamos ante un conocimiento "verdadero". Esta sensación se refuerza cuando entramos en contacto con las pruebas matemáticas, casi siempre durante las clases de geometría elemental. Mucho tiempo después –creo– encontramos una pregunta inquietante: ¿De qué verdad habla la matemática? Este interés surge porque nuestra imagen tradicional de "verdad" se refiere a una aparente correspondencia entre las construcciones intelectuales y el mundo exterior que generalmente llamamos "realidad objetiva". Resulta entonces inevitable que nos preguntemos a qué realidad se conforman nuestras afirmaciones matemáticas, qué objetos son los que se manifiestan y cuáles criterios son los que juzgan la verdad de esos predicados.

Para hablar de los objetos matemáticos y del rigor, debemos simultáneamente considerar el punto de vista histórico y el punto de vista normativo. Desde estas perspectivas, definiremos dos principios metodológicos que se ejemplificarán en el curso de este documento. El primer principio sostiene que el objeto matemático no puede estar separado de su normatividad. Por normatividad, nos referimos a los criterios de validez en relación con las acciones que conducen a la construcción del objeto matemático, y a las acciones y operaciones que pueden ser válidamente realizadas en el objeto construido. Sostenemos que el objeto, las acciones implicadas en su construcción y las operaciones que se pueden realizar con validez sobre éste no pueden estar disociados entre sí. A lo largo de la historia, así como lo argumentaremos en este documento, los intentos para separar a los objetos de su normatividad (muchas veces guiados por “lo que deben ser”) han llevado a las matemáticas a situaciones de crisis. El segundo principio niega la posibilidad de explicar cierto nivel de organización del conocimiento al reducirlo a un nivel inferior. Basándonos en la idea de que la creación de un objeto matemático es un proceso histórico –desde la epistemología–, podemos decir que las explicaciones de los procesos científicos son posibles si el nivel inferior del desarrollo conceptual se explica desde el nivel superior.

Nuestro primer ejemplo

El objeto matemático no puede estar disociado de las formas de intervención operacional que son posibles con él y en él. En ciertas instancias altamente importantes, la exploración por medio de los campos operacionales ha sido tan profunda como el hecho de modificar el mismo curso de las matemáticas. Tal vez fue ese momento el que se conoce como “la crisis de lo inconmensurable" en la Escuela Pitagórica.[1] Trabajar bajo la visión de que se veía al mundo organizado sobre la base de los números enteros y de sus razones, los mismos pitagóricos erigieron un formidable obstáculo. Ellos exploraron los campos operacionales de su concepto de número y los llevaron hasta los mismos límites, sólo para encontrar ahí un resultado inesperado: la inconmensurabilidad de dos segmentos. Este hecho desarticuló su concepto de las matemáticas y también, ya que los dos eran inseparables, su concepto del mundo. El filósofo griego Proclo escribió que los pitagóricos que hicieron este descubrimiento de la inconmensurabilidad fueron sentenciados a muerte por vía de un naufragio.

De esta manera, los pitagóricos decidieron no aceptar las consecuencias de su razonamiento, rompiendo así los lazos permanentes que existían entre el objeto y sus campos operacionales. En otras palabras, al no aceptar las consecuencias de las operaciones debido a que revelaban una propiedad de número que no estaba de acuerdo con sus preconcepciones, los pitagóricos fueron forzados a modificar su noción de número, excluyendo de este modo la representación numérica de las magnitudes continuas (nota final iii). Esto condujo a una separación entre la aritmética y la geometría, entre el dominio de lo discreto y el dominio de lo continuo. Las repercusiones de esta decisión se sintieron durante un largo periodo en la historia de las matemáticas que terminaron en el siglo XVI. Volveremos a este punto más adelante. Este ejemplo ilustra el hecho de que incluso cuando las intervenciones operacionales se aceptaron como

[1] Algunos historiadores matemáticos dicen que no hay evidencia *per se*, de alguna crisis en la Escuela Pitagórica del tipo que describimos aquí, además de una observación anecdótica de Proclo, mil años después. Aun cuando uno crea que la crisis era una especie de mito, el punto matemático de que el problema de la inconmensurabilidad se resolviera de alguna manera existía y condujo a la separación de la aritmética y la geometría. No tenemos la intención de "reconstruir" a los antiguos matemáticos griegos, sino que simplemente exploramos las consecuencias de romper los lazos entre los objetos matemáticos y sus campos operacionales.

una manera para construir el objeto, aún hay situaciones críticas que surgen, umbrales que los matemáticos rehúsan cruzar a causa de las creencias ontológicas que ellos sostienen, previas al ejercicio operacional.

La organización de las matemáticas

Desde un punto de vista epistemológico, el desarrollo histórico de las matemáticas coincide con un incremento en sus niveles de organización. La matemática euclidiana, por ejemplo, corresponde a un nivel más temprano que la de Hilbert; esto no significa que la matemática hilbertiana[2] estuviera latente dentro de Euclides, aunque ciertas semejanzas, así como ciertas divergencias, entre estos dos campos de racionalidad deben ser reconocidas. Es evidente que éstas corresponden a dos estilos radicalmente diferentes de la práctica matemática y de la conceptualización (y en eso radica la divergencia); no obstante, en los intentos espontáneos de explicar las relaciones entre estas dos teorías, hay una tendencia de hablar del nivel superior al reducir su nivel de complejidad y al bajar sus elementos al nivel inferior. De manera inversa, el nivel inferior encuentra su explicación cuando el superior lo asimila. En términos más locales, esta necesidad de explicar los fenómenos, recurriendo a un nivel superior de organización, se puede ver cuando estudiamos una prueba que, por razones de complejidad o longitud, ha sido dividida en series de proposiciones auxiliares. Un buen ejemplo es la prueba del teorema que afirma que el producto de una infinidad de espacios topológicos compactos es compacto. La prueba se halla en una serie de lemas previos, y culmina en un breve enunciado que afirma que el teorema se pone a prueba al invocar los lemas previos (véase cualquier texto de topología). Aunque podemos entender cada una de las partes, somos incapaces de librarnos de una sensación de opacidad, de no

[2] Por matemática hilbertiana nos referimos a la re-organización axiomática de Hilbert de la geometría euclidiana.

poder entender el teorema en cuestión. Esto se debe a que el significado global se ha perdido al subdividir la prueba, y esto impone la necesidad de interconectar las partes para recuperar el sentido del todo. No es tan sólo un problema de lógica formal, es una cuestión de *intencionalidad* de *hacia dónde van* los resultados preliminares. La evolución de la dialéctica entre el objeto y su normatividad es así explicada como parte de la organización global de las matemáticas.

Nuestro segundo ejemplo: los dominios locales de inteligibilidad

La organización global mencionada anteriormente se refiere a la matemática en un momento de su desarrollo, cuando "detenemos" el proceso constructivo. La matemática en desarrollo obedece a una dinámica de organización que al principio es local por naturaleza. Inicialmente, los objetos y las situaciones no aparecen claramente trazados: el objeto aparece dentro de una red de trabajo conceptual, equipado con un campo operatorio provisional que es útil para comenzar su exploración. La historia de las matemáticas nos muestra que durante la evolución de una disciplina se forman núcleos conceptuales y la actividad matemática progresa alrededor de ellos. Llamaremos a estos núcleos *dominios locales de inteligibilidad*. Consideremos un ejemplo tomado del cálculo diferencial (nota final ii). Durante el siglo XVII, se identificaron problemas de máximos y mínimos con problemas que implicaban el trazo de tangentes en puntos especiales sobre una curva –dada a través de una expresión analítica. Este tipo de representación analítica permitió una expansión del universo de curvas en las que las tangentes se podían trazar. De esta manera, surgió una organización local con las siguientes características:

> Una curva descrita en términos de una ecuación, y un campo operacional que consiste, esencialmente, en "derivar" la ecuación y en hacer este "derivado" igual a cero.

Cualquier texto que esté relacionado con la historia del cálculo revelará que este es el tipo de instrumento matemático usado por Fermat. Este dominio local de inteligibilidad está ligado al contexto proporcionado por la geometría analítica; éste generaliza el problema de trazo de tangentes por medio de una nueva representación del objeto geométrico que tiene que ser manipulado –la expresión analítica de la curva. La exploración de la derivada en este dominio local no requiere, en principio, de una definición formal del concepto que se tiene que explorar; más bien, es sobre la base del dominio local que el concepto se construye. En el caso que tenemos aquí, el trazo de las tangentes para las curvas convexas, el campo operacional es suficiente. Sin embargo, surge un problema cuando tratamos de trazar una tangente en un punto de inflexión.[3] Ahí, el campo operacional indica que la tangente es una línea recta que **atraviesa** la curva, pero el concepto de una línea recta tangente derivado de las tangentes para las curvas convexas "se opone" a tal generalización. Esta tensión entre el campo operacional y el concepto de tangente es reforzada por la independencia última que adquiere el campo operacional con respecto a la concepción original de las tangentes. Nos vemos forzados, por lo tanto, a modificar la idea que nos hemos hecho de la noción, para hacer que se ajuste a las nuevas situaciones reveladas por el campo operatorio. De esta manera, el concepto original gradualmente adquiere un nivel superior de organización, se vuelve más abstracto, obtiene su independencia del contexto del cual surgió y surge un grado mayor de compatibilidad con el campo operacional. Por último, esta actividad da origen a lo que llamamos el **concepto de derivada**.

[3] Los lectores bien versados con el cálculo del siglo XVII pueden encontrar nuestra exposición en esta sección "ahistórica", porque estamos atribuyendo derivados o diferenciación a Fermat de una manera un poco rara. De nuevo, el punto de esta exposición es explorar las consecuencias de los problemas que surgen de la construcción de tangentes en puntos de inflexiones. Algunos historiadores expresan que Leibniz trató este de manera muy correcta desde su primer artículo sobre el cálculo en 1684.

Nuestro tercer ejemplo: la organización euclidiana

La teoría del conocimiento propuesta por Aristóteles definía los objetos matemáticos como un resultado de la abstracción de objetos de la naturaleza. La tesis de que cualquier cuerpo de conocimiento, sobre el curso de su desarrollo, tiende hacia una búsqueda de sus principios se traducía, después de un esfuerzo considerable, en el sistema clásico euclidiano. La intuición geométrica (nota final vi) es desarrollada a partir de un conjunto de acciones internalizadas, en donde el objeto físico es captado por medio del lenguaje. Los objetos matemáticos pueden tener un cierto grado de autonomía lógica pero, ontológicamente, siguen siendo dependientes de los objetos físicos y, por consecuencia, son forzados a respetar los límites impuestos por los segundos. Desde esta perspectiva, el objeto "magnitud matemática" sigue estando subordinado al objeto "magnitud física", de tal manera que hay un control permanente, ontológico, sobre los objetos de las matemáticas euclidianas. Los postulados deben ser "evidentes por sí mismos", propiedad que heredan de las condiciones materiales de donde provienen. Estas consideraciones nos ayudan a entender por qué Euclides hizo un esfuerzo considerable para mantener el postulado de las paralelas en los márgenes de su desarrollo axiomático de la geometría. De hecho, decir que una sola paralela pasa a través de un punto externo a una línea recta evade la verificación experimental a través del objeto físico correspondiente. Ya que estamos analizando un postulado, es necesario que mantengamos en mente el problema ontológico y, de manera consecuente, los límites impuestos sobre los objetos matemáticos. Como es bien sabido, la primera cosa que hizo Euclides fue reemplazar la versión anterior del postulado de las paralelas con una versión que no mencionaba explícitamente al infinito. El costo era muy alto: la nueva versión era muy extensa y complicada, y daba la impresión de ser una proposición que se podía deducir de los postulados restantes. Ésta decía:

> Si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas hace a los ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, si

se produjeran indefinidamente, se encuentran de ese lado, en el que están los ángulos, menores que dos ángulos rectos (Heath: *Euclides. Los trece libros de los elementos*, 202).

Esto dio origen al deseo de simplificación por parte de los estudiosos, quienes decidieron tratar de mejorar esta nueva proposición, en lugar de aceptarla como "evidente por sí misma". La riqueza de las acciones simbólicas es mayor que la que se produce cuando uno se ocupa de los objetos ontológicamente controlados, como en el caso de la geometría euclidiana. En esa época, sin embargo, no se tenía conciencia de ese hecho, como se podía ver por la búsqueda continua de una prueba, lo cual, aun cuando ocupaba un lugar formal, intentaba dejar evidencia de la naturaleza euclidiana del espacio. La estructura formal no era *tematizada* (ver la nota final iv) como objeto de investigación. La historia de estos esfuerzos es muy, muy larga, y cubre más de veinte siglos –garantía inequívoca de que estamos enfrentando un problema principal del conocimiento. El resultado de este proceso ha sido el desarrollo de las geometrías no-euclidianas.

Las estructuras como objetos

La aproximación al problema de las paralelas cambió a principios del siglo XVIII. El nuevo enfoque sustituyó al quinto postulado, con una de las formas adoptada por su negación –es decir, más de una paralela pasa a través de un punto externo a una línea recta. Además, los otros postulados se conservaban. El trabajo de Saccheri (1667-1733) y, en un menor grado, el de otros geómetras, tuvo lugar durante este periodo. El objetivo era desarrollar las consecuencias del nuevo sistema axiomático hasta que surgiera una contradicción. La contradicción se atribuiría a la presencia de una hipótesis absurda (a una negación del quinto postulado). La hipótesis metafísica –es decir, la *creencia* en la naturaleza euclidiana del espacio– seguía pesando mucho en la interpretación: la contradicción vendría de lo absurdo, de una hipótesis que iba en contra de las intuiciones de los geómetras acerca del espacio. Ya que las reflexiones de los matemáticos alimentaban su interés en el sistema de las relaciones proporcionadas por el sistema axiomático, se hizo patente gradualmente, una debilidad en el control ontológico sobre el objeto matemático y, al mismo tiempo, hubo un reforzamiento en el rol de la estructura del sistema como un todo. De esta manera, el objeto dejó de ser visto como el resultado de una abstracción empírica y gradualmente se le vio *determinado por el sistema de relaciones en el que estaba involucrado*. Fue ahí, en el sistema de las relaciones, donde se creó el nuevo significado matemático de los términos. Esta situación opone la concepción realista de las matemáticas euclidianas a la posición constructivista en la cual las matemáticas surgen como resultado de *la actividad* constructiva del sujeto, y no como un reflejo mecánico de una realidad que las trasciende. Los objetos matemáticos son así objetos conceptuales que sirven como sustratos y núcleos organizadores de la actividad matemática.

Si estos geómetras, incluido Saccheri, suponían que la prueba de consistencia implicaba la naturaleza euclidiana del espacio, era porque habían cambiado inconscientemente las reglas del juego; en realidad, habían elegido un control simbólico total de los objetos. Subyacente a todo esto estaba la hipótesis de que la estructura formal del sistema euclidiano podía imponer sus dictados a la ontología. Este desplazamiento en la concepción de la actividad matemática marca, definitivamente, la *tematización de la estructura* como un objeto de estudio. Gauss indicó este cambio en las reglas en términos explícitos. Separó el problema de la consistencia del sistema axiomático, del problema de la naturaleza del espacio físico. En 1824, considerando la suma de los ángulos en un triángulo, escribió lo siguiente a su amigo Taurinus:

> [...] pero la situación es bastante diferente en la segunda parte, que la suma de los ángulos no puede ser menor a los 180 grados; este es el punto crítico, el arrecife sobre el que suceden todos los naufragios [...] la suposición de que la suma de los tres ángulos es menor a los 180 grados nos lleva a una geometría curiosa, bastante diferente de la nuestra (la euclidiana) pero completamente consistente que he desarrollado a mi entera satisfacción, de modo

> que puedo resolver cada problema de ella, con la excepción de la determinación de una constante, la cual no se puede designar *a priori* [...] los teoremas de esta geometría parecen ser paradójicos y, para los novatos, absurdos; pero la reflexión serena, calmada, revela que no contienen nada que pueda ser imposible. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo se vuelven tan pequeños como uno lo desee, sólo si los lados se toman lo suficientemente largos; sin embargo, el área del triángulo nunca puede exceder un límite definido sin considerar qué tan grandes se tomen los lados [...] todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no-euclidiana no han tenido éxito, y algo que se opone a nuestras concepciones es que, si esta [forma de geometría] fuera verdad, debe existir en el espacio una magnitud lineal determinada por sí misma pero desconocida por nosotros. Pero me parece que sabemos [...] muy poco de la verdadera naturaleza del espacio, para considerar como un imposible absoluto algo nos parezca tan poco natural... (Greenberg, 1974, pp. 142-144).

Uno de los resultados aparentemente absurdos se refiere a la fórmula que usamos para calcular el área de un triángulo. La suposición de que más de una paralela pasa a través de un punto externo a una línea recta significa que, dado un triángulo con ángulos que miden (en grados) a, b y c, su área se calcula por medio de la fórmula: Área=k (180-(a+b+c)) donde k es una constante positiva que no se puede determinar *a priori*. Esta fórmula, permite afirmar que, a diferencia de lo que sucede en la geometría euclidiana, el área de un triángulo depende de la longitud de sus lados, justamente como explicó Gauss anteriormente a Taurinus. Gauss tenía razón al pedir calma. El resultado es sorprendente. Resulta interesante señalar que Wallis intentó demostrar el quinto postulado, agregándole a los primeros cuatro postulados la hipótesis adicional de que existían triángulos con áreas arbitrariamente grandes. La fórmula del área hiperbólica descubierta por Gauss demostró muy claramente en dónde se puede hallar la equivocación de Wallis. Podemos explicar la ilegitimidad de su hipótesis al progresar a un nivel superior de organización en el campo de la geometría, como el logrado por Gauss. Las geometrías no-euclidianas "borraron" el problema ontológico de las matemáticas. El concepto de modelo matemático se ubicó al frente. Pero podríamos tener que tomar en cuenta que la palabra "modelo" se puede interpretar de dos maneras diferentes: en primer lugar, como un "modelo ontológico", como se interpretó a lo largo de la lucha con el quinto postulado.

Hoy, este es casi el mismo punto de vista entre los científicos naturales, quienes creen que la ciencia se está aproximando gradualmente a un mejor isomorfismo entre sus modelos y la realidad. Este es el punto de vista "ingenuo". El otro es ver un modelo como una descripción formal de la realidad que produce resultados compatibles con la observación. La semántica de estos modelos viene de la correspondencia entre el modelo y los experimentos. Por supuesto, uno puede trabajar "olvidándose" de estos puntos de vista, pero entonces uno puede entrar a un laberinto, como fue el caso con la geometría no-euclidiana. Aquí podemos ver un profundo obstáculo para la aparición de la geometría no-euclidiana. La clave está en la distinción entre la ontología y la consistencia primero y luego entre la ontología y la noción de un modelo *a posteriori*. Al hacer estas consideraciones, recordamos el *Theorema Egregium* de Gauss (ver la nota final v). Partiendo de este resultado es fácil afirmar que Gauss vio más allá que sus contemporáneos y temía (habría que analizar aquí rasgos de su carácter, pero eso está más allá de nuestras posibilidades) que una lectura que no fuera suficientemente profunda, podría generar polémicas indeseables. Gauss escribió esto a Taurinus:

> Todos mis esfuerzos por descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no-euclidiana no han tenido éxito, y una de las cosas que se opone a nuestras concepciones es que, si fuera verdad, debe existir en el espacio una magnitud lineal determinada por sí misma (pero desconocida para nosotros).

Nos parece que al poner estas líneas al lado del Egregium, Gauss sabía entonces que la *curvatura* era la clave para comprender ese problema. La medición de las distancias es la actividad instrumental para "descubrir" la naturaleza de un espacio (matemático); es el Egregium lo que nos permite escribir este comentario. Con la curvatura gaussiana, podemos re-definir la cuestión de la naturaleza euclidiana del espacio. De hecho, la presencia de la curvatura resuelve simultáneamente el problema ontológico y la consistencia, presente en esta investigación sobre la naturaleza del espacio. La curvatura formula el problema en un nivel superior y sugiere el tránsito de (al menos algo cercano) la imagen conceptual a la definición formal (matemática) del espacio. El siguiente ejemplo es una respuesta a la separación entre la aritmética y la geometría, ocasionada por la crisis pitagórica.

El concepto de cantidad para Stevin

El trabajo matemático de Simon Stevin, que contiene la mayor parte de sus contribuciones teóricas, es *L'Arithmetique*, publicado en 1585 (ver la nota final vii). En el primer volumen, Stevin presenta una extensión del concepto de número que es sólo posible después de una ruptura explícita con la concepción euclidiana. Por medio de este nuevo concepto de número, Stevin trata de dar fundamento a los procedimientos del cálculo aritmético con la notación decimal, de reciente cuño en su momento (ver la nota final viii). Stevin comienza su tratado con las siguientes definiciones:

> Definición 1: La aritmética es la ciencia del número
> Definición 2: El número explica la cantidad de cada cosa

La definición 2 contiene el gran cambio que Stevin introdujo en la concepción de número (Stevin, *L'Arithmetique*, p. 1) con respecto a las matemáticas euclidianas. Para Aristóteles, el número es una cantidad X, mientras que para Stevin, el número es el medio por el cual se evidencia la cantidad (cantidad que sería una propiedad de las cosas). Señalemos esta diferencia: Para ambos autores, la cantidad es un concepto abstraído –en un primer nivel de representación– de ciertas propiedades de objetos materiales (su "ser cuantitativo"), pero mientras Aristóteles coloca al número y a la magnitud en este primer nivel, Stevin pasa a un segundo nivel de representación en el que el número "habla" del nivel precedente.

El número, para Stevin, no sólo se refiere a la cantidad que puede contarse, sino también a la cantidad que puede medirse, lo que implica un cambio en las acciones asociadas con el número: no sólo se usa para contar sino también para medir.

Además de este nuevo concepto de número, cuyo objetivo era establecer una identificación al tratar cantidades discretas y continuas, Stevin tiene que indicar, de manera explícita, importantes diferencias con respecto al número en las matemáticas griegas.

a) La unidad (numérica o geométrica, tratadas ahora como idénticas) es número.
b) La unidad es indefinidamente divisible.
c) Las partes de la unidad son, a su vez, números.

De manera directa, Stevin obtiene de estas premisas una extensión del dominio numérico que incluye ahora a la unidad y a las fracciones de unidad. Pero esta no fue la única extensión que él introdujo, ya que extendió la clausura de las operaciones aritméticas griegas a las operaciones de extracción de raíces, incorporando así las raíces de los números (racionales e irracionales), y todos los números que resultan de las operaciones algebraicas con números positivos.

En segundo lugar, Stevin dispone de la dicotomía entre lo discreto y lo continuo de la cantidad al rechazar la "discretez" del número como una característica de su esencia: "El número no es una cantidad discontinua" (*L'Arithmetique*, p. 2). El número, como una entidad aislada, es "continuo" en el sentido aristoteliano, ya que se puede dividir indefinidamente y, de cualquier manera, hereda las características de continuidad o discretez de lo que se esté cuantificando. Por ejemplo, si hablamos de un caballo, el número uno es discreto, sin embargo, si hablamos de un metro, el número uno es continuo (nota final ix). Con esta formulación, lo continuo y lo discreto dejan de ser categorías ontológicas; la discusión de este punto está circunscrita al campo de las matemáticas, donde se cuantifican las propiedades de los objetos.

En tercer lugar, la unidad ya no tiene el carácter privilegiado que tenía en las matemáticas griegas, como el *principio de generación del número*. Con su formulación, Stevin tiene que renunciar a la posibilidad de tener un principio generativo absoluto y se obligó a buscar un fundamento extra lógico para su concepto de número, es decir, un fundamento externo a las matemáticas, localizado en el contexto físico: la cantidad de cada cosa. El trabajo de Stevin está marcado por la prominencia de las operaciones aritméticas y las acciones concretas para darle realidad al número. Podemos hallar varios puntos en su trabajo –no donde él traza los principios, sino en los argumentos adyacentes– donde esto se puede apreciar. Veamos dichos puntos.

a) La esencia del número se halla en sus operaciones. La primera indicación de que el concepto de número de Stevin está condicionado por las operaciones que se pueden realizar con él, se encuentra en un pasaje de *L'Arithmetique*, donde Stevin argumenta a favor de la división de la unidad. Negar la divisibilidad de la unidad, dice Stevin, es limitar la naturaleza del número, la esencia que se muestra en las operaciones aritméticas que muchos autores habían realizado al dividir la unidad, como lo hace Diofanto (*L'Arithmetique*, p. 2).

Lo anterior da al número una existencia operacional, es decir, son las operaciones que podemos realizar con números las que determinan su naturaleza. Pero, ¿dónde están las operaciones aritméticas? Imaginemos cómo Stevin podría haber argumentado esto: El número explica la cantidad de cada cosa. Las operaciones aritméticas, por ejemplo, las relaciones y transformaciones de los números, explican las acciones o transformaciones que se realizan con las cosas (en tanto que se puedan cuantificar). Por lo tanto, las operaciones aritméticas están sustentadas por las acciones que realizan en las cantidades. Las primeras, a la vez, constituyen la esencia del número, de la misma manera que las acciones de medición, comparación, división, transformación, etcétera, son las que dan significado a la cantidad.

b) Clausura del dominio numérico con respecto a las operaciones algebraicas. Un paso muy importante hacia la ampliación del dominio numérico conduce a la consideración de que los resultados de las operaciones algebraicas realizadas con los números son números. Stevin argumenta este punto de dos maneras. El primer argumento, basado en la práctica de la medición, consiste en mostrar las magnitudes geométricas que se pueden asociar con dichos resultados. El segundo argumento –usado repetidamente por Stevin– tiene un carácter extra-lógico y fue duramente criticado en su tiempo. Veamos este argumento como fue presentado por primera vez cuando Stevin argumentó que *la unidad es número*.

> QUE LA UNIDAD ES NÚMERO. La parte es de la misma materia que el todo. La unidad es parte de una multitud de unidades. Por lo tanto, la unidad es de la misma materia que la multitud de unidades. Pero la materia de la que está compuesta la multitud es número. Por lo tanto la materia de la que está compuesta la unidades número (*L'Arithmetique*, p. 1) (ver las notas finales x y xi).

Este argumento presenta una clara ambivalencia con respecto a su nivel de abstracción. La primera premisa, "la parte es de la misma materia de su totalidad", se refiere a los objetos materiales, mientras que la segunda, "La unidad es parte de la multitud de unidades", se refiere a los objetos matemáticos y, de este modo, abstractos. El paso irrestricto de un nivel a otro muestra el apoyo normativo que le da la realidad física al concepto de número para Stevin, quien sustenta su concepto de número sobre la base de las operaciones que se pueden realizar con él, y las operaciones mismas, encuentran su fundamento en las acciones que se pueden hacer sobre la materia (en la medida que ésta se pueda cuantificar). La unidad de Stevin no es el único resultado de una abstracción de objetos como cantidades sino, principalmente, de toda la abstracción de las acciones coordinadas que se llevan a cabo en el proceso de la medición de estos objetos.

Conclusión

Hemos proporcionado algunos ejemplos de los momentos clave en el desarrollo de las matemáticas, los cuales apoyan nuestra tesis de que la naturaleza de los objetos matemáticos es co-sustancial con las invenciones operacionales que los acompañan y que determinan la normatividad a la que están sujetos. Los contextos de descubrimiento y de justificación no pueden estar separados, como trató de hacerlo el empirismo lógico. A causa de su poder sugestivo, nos gustaría traer a la memoria lo que Jean Cavaillés (1947) escribió en la parte final de su libro sobre la lógica y la teoría de la ciencia (p. 43):

> La teoría de la prueba exige una ontología. Sin embargo, los patrones y los puntos de referencia conceptuales que usan los matemáticos como elementos de medición en su trabajo, no constituyen una ontología.

La historia de las geometrías no euclidianas es suficiente para mostrarnos que dicha interpretación sería inapropiada: inicialmente, la intuición geométrica comprende una serie de acciones internalizadas. Sin embargo, como las acciones internalizadas son más ricas que las acciones sensoriomotoras (ver la nota final xii), ellas dan origen a las co-ordinaciones que remplazan el espacio intuitivo y proveen el punto de inicio del espacio representativo. La construcción de diferentes geometrías demostró la incapacidad de la concepción intuitiva del espacio para agotar la actividad operacional del sujeto. La matemática, como lo han sugerido varios estudiosos, no es meramente un cuerpo de conocimiento; es, sobre todo, una actividad. Los diferentes niveles de organización y sus redes de significados constituyen el sustrato de esta actividad durante el desarrollo de las matemáticas. Estas redes permiten interpretaciones de los fenómenos que se tornan objetos de estudio. De esta manera, el desarrollo de la disciplina corresponde a la construcción de teorías con capacidad de explicaciones más profundas.

Notas finales

i Agradecemos al profesor Gil Henriques de la Universidad de Ginebra por su esclarecedora discusión sobre varias secciones de este artículo. El artículo está dedicado a la memoria de Guillermina Waldegg.

ii Por ejemplo, Edwards, 1979, pp. 122-125.

iii Por ejemplo, las magnitudes matemáticas únicamente pueden ser infinitos potenciales (ver Moreno y Waldegg, 1991).

iv "The change from usage, or implicit application to consequent use, and conceptualization constitutes what has come to be known ander the term 'thematization'" (Piaget y García, 1989, p. 105).

v Ver Bonola (1995), pp. 43-51 o a Boi (1995), pp. 20-27.

vi No en el sentido usado por Brouwer, sino en el de Piaget 1950.

vii La primera parte de este volumen (*L'Arithmetique*) contiene definiciones, operaciones y traslaciones con comentarios de los seis primeros libros de *Diophantus's Álgebra*. La segunda parte *(La Practique d'Arithmetique)* contiene problemas resueltos.

viii Durante el mismo año (1585), Stevin publicó un documento corto titulado *La disme on decimal notation and its arithmetics*, que incluía el tratamiento de las fracciones decimales. Este documento se incluyó en la primera edición de *L'Arithmetique*.

ix *Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chascune chose.*

x Aritóteles: Categorías 1 b, 25.

xi QUE L'UNITE EST NOMBRE (en mayúsculas en el original).

xii Ver Piaget (1979), p. 41.

Moreno, L.; Sriraman,B. y Waldegg, G. (2006). "Mathematical objects and the evolution of rigor", *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 5 (1): 17-28.

Bibliografía

Abd-El-Khalick, F.; Bell, R. y Lederman, N. (1999). "The nature of science and instructional practice: Making the unnatural", *Science Education*, 82: 417-436.

Adler, P. & Adler, P. (1998). "Observational techniques", en N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials*, Londres: Sage.

Aristotle (1978): *The Great Books of the western World*, vol. VIII, Chicago: Encyclopaedia Britannica.

Arrigo, G. y D'Amore, B. (1999). "Lo veo pero no lo creo: obstáculos epistemológicos y didácticos en la comprensión del infinito actual", *Educación Matemática*, 11 (1): 5-24.

Bleicher, R. (1998). "Classroom interactions: Using interactional sociolinguistics to make sense of recorded classroom talk", en J. Malone, B. Atweh, y J. Northfield (eds.), *Research and supervision in mathematics and science education,* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 85-104.

Boi, L. (1995). *Le problème mathématique de l'espace. Une quéie de l'intelligible*, Berlín: Springer.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen* (Leipzig, C.H. Reclam). *Las paradojas del infinito* (trad. L. F. Segura), México: UNAM (colección Mathema), 1991.

Bolzano, B. (1851), *Paradoxien des Unendlichen* (Leipzig, C.H. Reclam), English trans. by D.H. Steel, Londres: Routledge, 1951.

Bonola, R. (1995). *Non-Euclidean Geometry*, Nueva York: Dover Publications Inc.

Bryan, L y Atwater, M. (2002). "Teacher beliefs and cultural models: A challenge for science teacher preparation programs", *Science Education*, 86: 821-839.

Calderhead, J. (1996). "Teachers: Beliefs and knowledge", en D. Berliner y R. Calfee (eds.), *Handbook of educational psychology*, Nueva York: Macmillan, pp. 709-725.

Cantor, G. (1877), "Une contribution a la théorie des ensembles", *Acta Mathematica* 2, 1883: 311-328, French trans. by the author.

Cantor, G. (1883). "Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (Leipzig, B.G. Teubner). "Foundation of a General Theory of Manifolds" (trad. U. Papart), *The Campaigner,* vol 9: 69-96, 1976.

Cantor, G. (1895). Beiträge zur Begrüng der transfiniten Mengenlehre. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (trad. P.E.B. Jourdain), Nueva York: Dover Publications, Inc., 1955.

Cavaillés, J. (1947). *Sur la logique et la théorie de la science*, París: Libraire Philosophique Verlag.

Clagett, M. (1968). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motion*, Madison, Wisconsin: University of Wisconsin Press.

Clandinin, D.J. y Connelly, F.M. (1998). "Personal experience methods", en N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials*, Londres: Sage, pp. 150-178.

Cohen, L.; Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th ed.). Londres: Routledge Falmer.

Cole, M. y Engestrom, Y. (1993). "A cultural-historical approach to distributed cognition", en G. Salomon (ed.), *Distributed cognitions psychological and educational considerations*, Nueva York: Cambridge University Press, pp. 1-46.

Crook, C. (2000). "Motivation and the ecology of collaborative learning", en R. Joiner, K. Littleton, D. Faulkner, y D. Miell (eds.), *Rethinking collaborative learning*, Londres: Free Association Books, pp. 161-178.

D'Amore, B. (1996). "El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas y de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática", *Epsilon* 36: 341-360.

Dass, P.M. (2001). "Implementation of instructional innovations in K-8 science classes: perspectives of in-service teachers", *International Journal of Science Education*, 23: 969-984.

Dedekind, R. (1888). Vorlesungen über Zahlentheorie (Braunschweig). Essays on the Theory of Numbers (Trad. W.W. Beman) 1901, reimpreso en Nueva York: Dover, 1963.

Descartes, R. (1628). "Rules for the Direction of the Mind", en Kolak, D. (ed.), *From Plato to Wittgenstein. The Historical Foundations of Mind*, Belmont CA: 4182, Wadsworth Publishing Company, 1994.

Duval, R. (1983). "L'obstacle du dedoublement des objets mathematiques". *Educational Studies in Mathematics*, 14: 358-414.

Edward, D. (1977). “Toward a discursive psychology of classroom education”, en C. Coll y D. Edward (eds.), *Teaching, learning and classroom discourse: Aproaches to the study of educational discourse*, Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje, pp. 33-48.

Edward, D. y Mercer, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*, Londres: Methuen/Routledge.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*, Nueva York: Springer Verlag.

Euclid. The Elements, in *Sir Thomas Heath, Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, New York: Dover Publications, Inc. 1956.

Falk, R. (1994). “Infinity: A cognitive challenge”, *Theory and Psychology*, 4 (1): 35-60.

Falk, R.; Gassner, D.; Ben-Zoor, F. y Ben-Simon, K. (1986). “How do children cope with infinity of numbers?”, Proceedings of the *10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Londres: 13-18.

Feldman, A. (2002). “Multiple perspectives for the study of teaching: knowledge, reasoning, understanding and being”, *Journal of Research in Science Teaching*, 39: 1032-1055.

Fishbein, E. Tirosch, D. and Hess, P.(1979), “The intuitions of infinty”, *Educational Studies in Mathematics*, 10: 3-40.

Fishbein, M. y Ajzen, I. (1975). *Belief, attitude, intention and behavior. An introduction to theory and research,* Nueva York: Addison-Wesley.

Flores, F.; López, A.; Gallegos, L., y Barojas, J. (2000). “Transforming science and learning concepts of physics teachers”, *International Journal of Science Education,* 22: 197-208.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht: Rediel.

Furinghetti, F. y Radford, L. (2002). “Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice”, en L.D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 631, 654.

Galilei, G. (1638), *Dialogues Concerning Two New Sciences* (trad. H. Crew y A. de Salvio), Nueva York: Dover Publications, Inc., 1954.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*, tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2000). “Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual”, *Educación Matemática*, 12 (3): 5-18.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). "Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años". *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (1): 87-113.

Gonzalez, G. (1995). Students' notions of infinity and their remembrances of mathematics classes: A study with latino students, tesis de maestría, EUA: Cornell University.

Good, T. (1996). "Teaching effects and teacher evaluation", en J. Sikula, T.J. Buttery, y E. Guyton (eds.), *Handbook of research on teacher education,* 2a. ed, Nueva York: Simon, & Schuster/Macmillan, pp. 617-665.

Greenberg, M.L. (1974). *Euclidean and non-euclidean geometries: Development and history*, San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Haney, J.; Lumpe, A.; Czerniak, C., y Egan, V. (2002). "From beliefs to actions: The beliefs and actions of teachers implementing change", *Journal of Science Teacher Education*, 13: 171-187.

Heath, T. (1956). *Euclid. The thirteen Books of the Elements*, Nueva York: Dover Publications Inc.

Henri, F. y Lundgred-Cayrol, K. (1998). *Apprentissage collaborative et nouvelles technologies*, Montreal, Canadá: Center de Recherche LICEF, Bureau de technologies d'apprentissage.

Hewson, P.W. y Hewson, M.G. (1988). "An appropriate conception of teaching science: A view from studies of science learning", *Science Education*, 72: 597-614.

Horng, Wann-Sheng (1995). "How did Liu Hui perceive the concept of infinity: A revisit", *Historia Scientiarum*, vol. 4-3: 207-222.

Hrbacek, K. y Jech, T.: (1984) Introduction to set theory (2a. ed., revisada y expandida), Nueva York: Marcel Dekker, Inc.

Joiner, R.; Thompson, L.; Faulkner, D.; Littleton, K. y Miell, D. (2000). "Peer interaction and the effect of task presentation on the acquisition of scientific reasoning", en R. Joiner, K., Littleton, D. Faulkner, y D. Miell (eds.), *Rethinking collaborative learning*: 37-51. Londres: Free Association Books.

Jones, C.V. (1978). *One as a Number, unpublished doctoral dissertation*, Toronto University.

Jongmans, C.T.; Biemans, H.J.A.; Sleegers, P.J.C. y de Jong, F.P.C.M. (1998). "Teachers' professional orientation and their concerns", *Teacher Development*, 2: 465-477.

Kaput, J. (1991). "Notations and representations as mediators of constructive processes", en E. von Glasersfeld (ed.), *Constructivism and Mathematical Education*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 53-74.

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origins of algebra*, MIT Press.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*, Nueva York: Basic Books.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated leaning. Legitimate peripheral participation,* Nueva York: Cambridge University Press.

Lederman, N. (1999). "Teachers' understanding of the nature of science and classroom practice: Factors that facilitate or impede the relationship", *Journal of Research in Science Teaching*, 36: 916-929.

Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia. Lenguaje, aprendizaje y valores*, Barcelona: Paidós.

Lemke, J. (2001). "Articulating communities sociocultural perspectives on science education", *Journal of Research in Science Teaching*, 38: 296-316.

Littleton, K. (2000). "Rethinking collaborative learning: An overview", en R. Joiner, K. Littleton, D. Faulkner y D. Miell (eds), *Rethinking collaborative learning*, Londres: Free Association Books, pp. 248-258.

López y Mota, A. (2003). "Educación en ciencias naturales", en A. López y Mota (coord.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje*, t. I, parte II, col. La Investigación educativa en México 1992-2002, vol. 7, México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Luft, J.; Roehrig, G. H. y Patterson, N. C. (2003). "Contrasting landscapes: A comparison the impact of different induction programs on beginning secondary science teachers beliefs, practices and experiences", *Journal of Research in Science Teaching*, 40: 77-97.

Mellado, V. (1998). "Pre-service teachers' classroom practice and their conceptions of the nature of science", en B. Fraser y G. Tobin (eds), *International Handbook of Science Education*, part II, Dordrecht: Kluwer Academic, pp. 1093-1110.

Mendoza, I. (2003). *Formas de organización, participación social y enseñanza en los principales espacios educativos en escuelas tecnológicas agropecuarias de nivel medio superior*, tesis de doctorado, México: Universidad Autónoma de Aguascalientes-Departamento de Educación (inédita).

Monaghan, J. (2001). "Young peoples' ideas of infinity", *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2-3): 239-257.

Monk, M. y Dillon, J. (1996). *Learning to teach science activities for science teachers and mentors*, Londres: Falmer Press.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1991). "The conceptual evolution of actual mathematical infinity". *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3): 211-231.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2000). "An epistemological history of number and variation", en Victor Katz (ed.) *Using History to Teach Mathematics An International Perspective*. Mathematical Association of America.

Moreno, L.; Sriraman,B. y Waldegg, G. (2006). "Mathematical Objects and the Evolution of Rigor", *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 5 (1): 17-28.

Mura, R. y Louice M. (1997). "L'infini, un ensemble de nombres? Enquête auprès de futurs enseignants et enseignantes", en *Learning of Mathematics*, 17 (3): 28-35.

Nespor, J. (1987). "The role of beliefs in the practice of teaching", *Journal of Curriculum Review*, 19: 317-328.

Newton, I. (1671). "Methodus fluxionum et serierum infinitarum", en Whiteside, D.T. (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge: Cambridge University Press, vol. 3: 32-353, 1967.

Nott, M. y Wellington, J. (1996). "Probing teachers' views of the nature of science", en G. Welford, J. Osborne, y P. Scott (eds.), *Research in Science Education in Europe. Current Issues and Themes*: 283-293, Londres: Falmer.

Núñez, R. (1993). En *deçà du transfini. Aspects psychocognitf sous-jacents au concept d'infini en mathématiques*, Fribourg: Editions Universitaires.

Oresme, N. (1968). "Treatise on the Configurations of Qualities and Motions (~ 1350)", en Clagett, capítulos I y II.

Pajares, M.F. (1992). "Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct", *Review of Educational Research*, 62: 307-332.

Piaget, J. (1950). "L'Epistémologie Génétique", *La Pensée mathématique*, vol. 1, París: Press Universitaires de France.

Piaget, J. (1979). *Genetic Epistemology* (trad. E. Duckworth), Nueva York: Columbia University Press.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science*, (trad. H. Feider), Nueva York: Columbia University Press.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psychogenèse et historie des sciences*, París: Flammarion (trad. al español, México: Siglo XXI).

Piaget, J. y García, R. (1987). "Vers une logique des significations", Ginebra: Murion Editeur (Spanish trans. Gedisa, S.A., 1989, México).

Piaget, J. *Introduction à L'epistémologie Génétique, La Pensée Mathématique*, vol. I, París: Presses Universitaires de France, 1950.

Piaget, J. *The Development of Thought: Equilibration of Cognitive Structures*, Blackwell, Oxford, 1978.

Quiroz, R. (2000). *Las condiciones de posibilidad de aprendizaje de los adolescentes en la educación secundaria*, tesis doctoral, México: Departamento de Investigaciones Educativas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Resta, P.K; Cristal, M.; Ferneding, K. y Kenndy Puthoff, A. (1999). "CSCL as catalyst for changing teacher practice". Proceedings of the computer support for collaborative learning (CSCL) 1999 Conference. Dic. 12-15, Stanford University, CA.

Richardson, V. (1996). "The role of attitudes and beliefs in learning to teach", en J. Sikula, T.J. Buttery, y E. Guyton (eds.), *Handbook of research on teacher education* (Sgda. ed.), Nueva York: Simon & Schuster/Macmillan, pp. 102-119.

Ritchie, S. & Rigano, D. (2002). "Discourses about a teachers' self-initiated changes in praxis: Storylines of care and support", *International Journal of Science Education*, 24: 1079-1094.

Rogoff, B. (1994). "Developing understanding of the idea of communities of learners", *Mind. Culture and Activity*, 1: 209-229.

Rogoff, B. (1998). "Cognition as a collaborative process", en D. Kuhn y R.S. Siegler (eds.), *Handbook of Child Psychology, Cognition, Perception and Language*, vol. 2: 679-744. Nueva York: Wiley.

Romero, C. (1996). "Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario", *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (1): 3-14.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*, Granada: Comares (Mathema).

Rop, C. (2002). "The meaning of student inquiry questions: A teacher's beliefs and responses", *International Journal of Science Education*, 24: 717-736.

Salish I. (1997). R*esearch Project. Secondary science and mathematics teacher preparation programs: Influences on new teachers and their students. Instrument package and user's guide*, Ames, IA: University of Iowa.

Schön, D. (1983). *A reflective practitioner. How professionals think in action*, Nueva York: Basic Books.

Schön, D. (1991). *The reflective turn. Case studies in and on educational practice*, Nueva York: New York Teachers College Press.

Scott, P. (1996). "Social interactions and personal meaning making", en G. Welford, J. Osborne, & P. Scott (eds.), *Research in Science Education in Europe. Current issues and themes*: 325-336. Londres: Falmer Press.

Sfard, A. 1995. “The development of algebra: Confronting historical and perspectives”, *Journal of Mathematical Behavior*, 14 (1): 15-35.

Sierpinska, A. (1987). “Humanities students and epistemological obstacles related to limits”, *Educational Studies in Mathematics*, 18: 371-397.

Stevin, S. (1585). *L’Arithmetique et la Practique d’Arithmetique, in Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin*, en A. Girard (ed.), Leyden, 1634.

Struik, D.J. (ed.). (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge, Mass: Harvard University Press .

Tall, D. (1980). “The notion of infinite measuring numbers and its relevances to the intition of infinty”, *Educational Studies in Mathematics*, 11: 271-284.

Tall, D. (1992). “The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof”, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nacional Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA: 495-511.

Tall, D. y Vinner, S. (1981a). “Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity”, *Educational Studies in Mathematics*, 11: 271-284.

Tall, D. y Vinner, S. (1981b). “Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity”, *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151-169.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. Buenos Aires: Paidós.

Tobin, K. y McRobbie C. (1997). “Beliefs about the nature of science and the enacted science currículo”, *Science & Education*, 6: 355-371.

Tsamir, P. (2001). “When ‘The Same’ is not perceived as such: The case of Infinite sets”. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2-3): 289-307.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1992). “Students’ awareness of inconsistent ideas about actual infinity”, *Proceedings of the XVI PME Conference*, vol. 3: 91.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1999). “Consistency and representation: The case of actual infinity”, *Journal of Research in Mathematical Education*, 30 (2): 214-219.

Vázquez-Abad, J.; Brousseau, N.; Waldegg, G.; Vezina, M.: Martínez, A. y Paul de Verjovsky, J. (2004). “Fostering distributed science learning through collaborative technologies”, *Journal of Science Education and Technology*, 13: 227-232.

Verjovsky, J. y Waldegg, G. (2005). "Analyzing beliefs and practices of a mexican high school biology teacher", *Journal of Research in Science Teaching,* vol. 42 (4): 465-491.

Vieta, F. (1591). "Introduction to the Analytical Art in Klein 1968". Appendix: 313-353.

Waldegg, G. (1987). *Esquemas de respuesta ante el infinito matemático. Transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito*, tesis doctoral, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Waldegg, G. (1988). "Cantor y la matematización del infinito". *MATHESIS*, VI (1): 75-96, México.

Waldegg, G. (1993a). "El infinito en la obra aristotélica". *Educación Matemática*, 5 (3): 20-38, México.

Waldegg, G. (1993b). "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction", *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 5: 19-36.

Waldegg, G. (1996). "Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1 (1): 107-122, México.

Waldegg, G. y Moreno, L. (2000). "An epistemological history of number and variation", en Victor Katz (ed.) *Using history to teach mathematics, an international perspective*. Mathematical Association of America (MAA).

Waldegg, G. (2001). "Ontological convictions and epistemological obstacles in Bolzano's elementary geometry", *Science and Education*, 10 (4): 409-418. Dordretcht.

Waldegg, G. (2005). "Bolzano's approach to the paradoxes of infinity: implications for teaching", *Science & Education*, 14: 559-577.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry toward a sociocultural practice and theory of education*, Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Comunities of practice: Learning, meaning, and identity*, Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2002). *A conference on E-learning presented in Montreal*, Canadá, Oct. 20, 2002.

Yerrick, R.; Parke, H., y Nugent, J. (1997). "Struggling to promote deeply rooted change: The 'filtering effect' of teachers belief on understanding transformational views of teaching science", *Science Education*, 81: 137-159.

Curriculum vitae
Guillermina Waldegg Casanova

Septiembre de 2004

1. Datos generales

Institución: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de adscripción: Investigaciones Educativas
Antigüedad en la institución: agosto, 1981
Posición: Investigador CINVESTAV 3 C
Sistema Nacional de Investigadores: Nivel II, clave 883274 (3979). Antigüedad en el sistema 1o. de julio de 1988

Escolaridad

Estudios profesionales

Licenciatura en Física. Facultad de Ciencias, UNAM, 1965-1968

Estudios de posgrado

Maestría en Ciencias, Matemática Educativa. CINVESTAV, 1979-1981:
Tesis: *Historia y enseñanza del Cálculo* (28 de agosto de 1981)

Doctorado en Ciencias, Matemática Educativa. CINVESTAV, 1985-1987
Tesis: *Esquemas de respuesta ante el infinito matemático. Transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito*: (1 de diciembre de 1987)

Citada en:

- Núñez Errázuriz, Rafael (1993). *En deçà du transfini. Aspects psychocognitifs sous-jacents au concept d'infini en mathématiques*. Friburgo: Editions Universitaires Fribourg (*Contributions fribourgeoises en psychologie*, vol. 4).

- Gonzalez, Gloriana (1995). *Students' Notions of Infinity and their Remembrances of Mathematics Classes: A Study with Latino Students*. Tesis de maestría. Cornell University.
- D'Amore, Bruno (1996). "El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas y de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática" en *Epsilon* 36, pp. 341-360 (artículo de revisión del campo).
- Penalva Martínez, M. Carmen (1998). "El mapa cognitivo como recurso de investigación en el estudio de casos" en *Educación Matemática*, 10 (2) 5-22.
- Garbin Dall'Alba, Sabrina (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, pp. 349
- Garbin, Sabrina y Azcárate, Carmen (2002). "Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años" *Enseñanza de las ciencias*, 20 (1) 87-113.
- Sacristán, A. I. (2003). "Dificultades y paradojas del intinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional" en Filloy, E. (coord) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, pp. 262-279, México, Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV, ISBN 968-16-7028-0.

Ingreso al CINVESTAV: 15 de mayo de 1981

Profesor Asociado A Sec. de Matemática Educativa,
mayo 15 de 1981-junio 30 de 1983

Profesor Adjunto A Sec. de Matemática Educativa,
julio 1o de 1983-abril 30 de 1984

Profesor Adjunto C, Sec. de Matemática Educativa,
mayo 1o de 1984-diciembre 31 de 1987

Profesor Titular A, Sec. de Matemática Educativa,
enero 1o de 1988-septiembre de 1990

Investigador CINVESTAV 3-A, Sec. de Metodología y Teoría de la Ciencia,
septiembre, 1990-1993

Investigador CINVESTAV 3-B, Sec. de Metodología y Teoría de la Ciencia,
septiembre 1993-octubre 1997

Investigador CINVESTAV 3-B, Departamento de Investigaciones Educativas,
noviembre 1997-agosto 2002

Investigador CINVESTAV 3-C, Departamento de Investigaciones Educativas,
agosto 2002-2005

Estancias sabáticas

Profesor Titular 4 en la Universidad Iberoamericana. Maestría en Investigación y Desarrollo de la Educación, México, DF. Enero 1997-febrero 1998

Profesor invitado en el Instituto François Viète, Universidad de Nantes, Francia. Septiembre 1998

Beca de Investigación de la Fundación Jean Piaget de la Universidad de Ginebra, en los *Archives Jean Piaget,* Ginebra, Suiza. Octubre-diciembre de 1998

Áreas de investigación

Historia y epistemología de la matemática (conceptos fundamentales del análisis: número, continuidad e infinito)

Bases epistemológicas de la enseñanza de las ciencias. Constructivismo en educación

Uso de las tecnologías de comunicación e información en la enseñanza de las ciencias

2. Productos de investigación y desarrollo

2.1 Artículos originales de investigación

2.1 a) Publicados en revistas de prestigio internacional con arbitraje estricto:

1. Figueras, O. y G. Waldegg (1986). "La medición en la escuela secundaria", en *Cuadernos de Investigación 2,* Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, 13 pp., más anexos, México.
2. Moreno, L. y G. Waldegg (1987). "El análisis matemático y su aritmetización", en *MATHESIS*, III (1) 49-72, México.

   Registrado en:

   Roa, C. y H. Siever (1990). *Bibliografía filosófica mexicana*, 1987, 2 (2) 117. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones Filosóficas.
3. Waldegg, G. (1988). "Cantor y la matematización del infinito", en *MATHESIS*, VI (1) 75-96, México.

Registrado en:

FILOS Base de datos sobre Filosofía en México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

Reseñado en:

Frápolli, María (1992), en *Modern Logic*, 3 (1) 56-57

4. Moreno, L. y G. Waldegg (1991). "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity", en *Educational Studies in Mathematics* 22 (3) 211-231, Dordrecht, Holanda.

Citado en:

- Tsamir, Pessia y Dina Tirosh (1992). "Students' Awareness of Inconsistent Ideas About Actual Infinity", en *XVI PME Conference*, vol. 3, p. 91.
- Núñez Errázuriz, Rafael (1993). *En deçà du transfini. Aspects psychocognitf sous-jacents au concept d'infini en mathématiques*, Fribourg Suisse: Editions Universitaires
- Ferrer Sánchez, Joaquín (1994). "Intuitive Notions on Sequences in Pupils of Secondary School", en *XVIII PME Conference*, p. 38.
- Falk, Ruma (1994). "Infinity: A Cognitive Challenge", en *Theory and Psychology*, 4 (1) 35-60.
- Horng, Wann-Sheng (1995). "How did Liu Hui Perceive the Concept of Infinity: A Revisit", en *Historia Scientiarum*, vol. 4-3, 207-222.
- González, Gloriana (1995). *Students' Notions of Infinity and their Remembrances of Mathematics Classes: A Study with Latino Students*. Tesis de maestría. Cornell University, EEUU.
- Romero, C. (1996). "Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario", en *Enseñanza de las Ciencias* 14 (1) 3-14.
- D'Amore, Bruno (1996). "El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas y de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática". en *Epsilon* 36, 341-360 (artículo de revisión del campo).
- Mura, Roberta y Louice Maurice (1997). "L'infini, un ensemble de nombres? Enquête auprès de futurs enseignants et enseignantes", en *For the Learning of Mathematics* 17 (3) 28-35.
- Romero Albadarejo, Isabel (1997). *La introducción del número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*, Granada: Ed. Comares (Mathema). ISBN 84-8151-436-5.
- Tsamir, Pessia y Dina Tirosh (1999). "Consistency and Representation: The Case of Actual Infinity", en *Journal of Research in Mathematical Education*, 30 (2) 214-219.

- Arrigo, Gianfranco y D'Amore, Bruno (1999). "Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos en la comprensión del infinito actual", en *Educación Matemática* 11 (1) 5-24.
- Garbin Dall'Alba, Sabrina (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, pp. 349.
- Garbin, S. y Azcárate, C. (2000). "Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual", en *Educación Matemática*, 12 (3) 5-18.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind brings Mathematics into Being*. N. York: Basic Books. ISBN 0-465-03770-4
- Tsamir, Pessia (2001). "When 'The Same' is not perceived as such: The case of Infinite sets", en *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2-3) 289-307.
- Monaghan, John (2001). "Young peoples' ideas of infinity" en *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2-3) 239-257.
- Garbin, Sabrina y Azcárate, Carmen (2002). "Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años", *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (1) 87-113.
- Sacristán, A. I. (2003). "Dificultades y paradojas del intinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional" en Filloy, E. (coord.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, pp. 262-279, México, Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV, ISBN 968-16-7028-0.
- Hitt, F. (2003). "El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones" en Filloy, E. (coord.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, pp. 91-111, México, Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV, ISBN 968-16-7028-0.
- Gómez, B. (2003). "La investigación histórica en didáctica de las matemáticas" en *Investigación en educación matemática,* Castro, Flores, Ortega, Rico y Vallecillos (Eds.) Séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigación en educación matemática, Granada 11-13 septiembre 2003.

Registrado en:

Revista ZDM (Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik) ZDM 92/5 C30-2850

5. Moreno, L y G. Waldegg (1992). "Constructivismo y educación matemática", en *Educación Matemática* 4 (2) 7-15, México. (Reproducido en *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas*. Programa Nacional de Actualización Permanente SEP, México, 1995, pp. 49-66 y en *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas*. Programa Nacional de Actualización Permanente SEP, México, 1995, pp. 27-39 y traducido al inglés por

solicitud de la revista como: Moreno, L., Waldegg, G. (1993). "Constructivism and Mathematical Education" en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24 (5) 653-661, UK.). Traducido al portugués como Moreno, L. Waldegg, G: "Constructivismo e Educaçao Matemática" en *Matemática (s)em rede. Formação de acompanhantes locais da região centro*. Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, Portugal. Disponible en http://membros.aveiro-digital.net/adam/oficina/textos/constructo.pdf

Citado en:

- CCH-UNAM (1993). *Segunda aproximación a la revisión del plan de estudios del bachillerato del CCH*. Documento de trabajo. México.
- Radford, Luis (1994). "La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos", en *Educación Matemática*, 6 (3) 21-36.
- Ontiveros, J. (1994). ¿Las matemáticas se inventan o se descubren? En *Cuadernos del Seminario de Epistemología*. México CCH-UNAM.
- Flores Martínez, Pablo (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza*. Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Fac. de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.
- Ruiz, A. (1997). "Las posibilidades de la historia en la educación matemática. Una visión filosófica", en *Boletín Informativo del Comité Interamericano de Educación Matemática*, Disponible en http://euclid.barry.edu/~luna/bulletin2.html
- Scott, Patrick (1998). "Reflexiones relacionadas con la preparación de profesores de matemáticas". Universidad Estatal de Nuevo México. Material policopiado.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos curriculares*. Bogotá: Cooperativa editorial magisterio. ISBN 958-691-067-9/958-691-050-4.
- Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Serie Lineamientos curriculares. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Santa Fe de Bogotá: Organización de Estados Americanos, Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- Block, D. y A.M. Álvarez (1999). "Los números en primer grado: Cuatro generaciones de situaciones didácticas", en *Educación Matemática*, 11 (1) 5-24.
- Villarraga, M. (1999). "Es importante la formación de maestros de matemáticas de educación básica para el siglo XXI?", *Revista de la Facultad de Educación*, septiembre, núm. 2.
- Block, D., Martínez, P., Dávila, M.,Ramírez, M, (2000). Usos de los problemas en la enseñan za de las matemáticas en la escuela primaria", en Carrillo, J. Contreras, L. C. (eds.). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos*. Huelva: Hergué Editorial.

- Pedraza Daza, F.P. & Garzón, L.C. (s/f) *Nuevo examen de estado para el ingreso a la educación superior*. *Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional/ Instituto Colombiano del Fomento de Educación Superior.
- Rivera Castellón, R. E. (2003) "Las ecuaciones diferenciales: Sus sentidos y significados en ingeniería", memorias del 2º Foro *La enseñanza de las matemáticas para ingeniería*, Fac. de Ingeriería, UNAM. Disponible en http://dcb.fi-c.unam.mx/foro/memorias2/ponencias/33.pdf
- Encinas Bringas, J.A. y Godoy, R. (2003) "Obstáculos en la transferencia de algunos conceptos del cálculo aprendidos en contextos de movimiento a otros", en Memorias del 2º Foro *La enseñanza de las matemáticas para ingeniería*. Fac. de Ingeriería, UNAM. Disponible en http://dcb.fi-c.unam.mx/foro/memorias2/ponencias/40.pdf
- De la Rosa Nolasco, A. (2003) Errores e inconsistencias en la ensenÞanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización, en *Mosaicos Matemáticos,* núm. 11.

6. Waldegg, G. (1993). "El infinito en la obra aristotélica", en *Educación Matemática*, 5 (3) 20-38, México.

7. Waldegg, G. (1993). "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction", en *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de l'IREM,* núm. 5, 19-36, Estrasburgo, Fr.

Citado en:

- D'Amore, Bruno (1996). "El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática", en *Epsilon* 36, 341-360 (artículo de revisión del campo).
- Bagni, Giorgio Tomaso (1997). *Didactics of Infinity: Euclid's Proof and Eratosthenes' Sieve" en Didactics of Mathematics-Technology in Education*, B. D'Amore y A Gagatsis (eds.) Thessaloniki.
- Arrigo, Gianfranco y D'Amore, Bruno (1999). "Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos en la comprensión del infinito actual" en *Educación Matemática* 11 (1) 5-24.
- Bagni, Giorgio Tomaso (2000). "Insiemi Infiniti di Numeri Reali", en *L'Educazione Matematica* Anno XXI, Serie VI, vol. 2, núm. 1, 22-46 Bologna.

8. Alarcón, J., M. Rigo y G. Waldegg (1994). "La ciencia analítica en la primera mitad del siglo XIX: El teorema del Valor Intermedio", en *MATHESIS*, X (1) 47-92, México.

Registrado en:

FILOS Base de datos sobre Filosofía en México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

9. Moreno, L. y G. Waldegg (1995). "Variación y representación: del número al continuo", en *Educación Matemática*, 7 (1) 12-28, México.

Citado en:

- Hitt, F. (1996). "Research Culture: Research Orientation in Mathematics Education", en *XVIII PME-NA Conference*, 3-18 (artículo de revisión del campo).

10. Waldegg, G. (1996). "La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número", en *Educación Matemática*, 8 (2) 5-17, México.

11. Waldegg, G. (1996). "Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual", en *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 1 (1) 107-122, México.

12. Waldegg, G. (1997). "Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique", en *For the Learning of Mathematics* 17 (1) 43-46, Canadá.

Citado en:

- Gulikers, Iris and Blom, Klaske (2001). "'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education" en *Educational Studies in Mathematics* 47, 223-258.
- Gómez, B. (2003). "La investigación histórica en didáctica de las matemáticas" en *Investigación en educación matemática,* Castro, Flores, Ortega, Rico y Vallecillos (eds.) Séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigación en educación matemática, Granada 11-13 septiembre 2003.

13. Waldegg, G. (1998). "Principios constructivistas para la educación matemática" en *Revista EMA*, 4 (1) 16-31, Bogotá.

Citado en:

- Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Serie Lineamientos curriculares. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Santa Fe de Bogotá: Organización de Estados Americanos, Ministerio de Educación Nacional de Colombia (cuarta de forros).

14. Moreno, L. y Waldegg, G. (1998). "La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿Coincidencia o complementariedad?" en *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (3) 421-429, Barcelona. (Reproducido en: *Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.*

Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, Dirección de la calidad de la educación, pp. 234-247).

Citado en:

- Ghisolfi Silva, R. M. y Pacheco Schneltzer, R. (s/f). "Bases epistemológicas e enfoques didáticos implicados na formação do educador", ANPEd-Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Brasil. disponible en: www.anped.org.br/24/T0469985762824.DOC

15. Waldegg, G. y de Agüero, M. (1999). "Habilidades cognoscitivas y esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios", en *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, IV (8) 203-244, México.
16. Waldegg, G. (2000) "El surgimiento de la investigación en Educación Matemática", en *Paradigma*, volumen XXI, no. 1, junio de 2000, pp. 115-138, Maracaibo, Venezuela.
17. Waldegg, G. (2001). "Ontological Convictions and Epistemological Obstacles in Bolzano's Elementary Geometry", en *Science and Education*, 10 (4) 409-418. Dordretcht.

Reseñado por:

Volker Peckhaus (Erlangen) en la revista ZDM (*Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*) Zbl 0987.00002 (2002).

18. Waldegg, G. (2002). "El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias", *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4* (1) http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-waldegg.html
19. Juárez, M. y Waldegg, G. (2003) "¿Qué tan adecuados son los dispositivos Web para el aprendizaje colaborativo?", en *Revista Electrónica de Investigación Educativa* 5 (2) 2003 http://redie.ens.uabc.mx?vol5no2/contenido-juarez.html
20. Gálvez, V. y Waldegg, G. (2003). "La negociación de significados asociados con la ciencia. Una metodología basada en ensayos individuales y la colaboración interpersonal", en *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*. México. Centro de Estudios Educativos, AC, vol. XXXIII, núm. 3, pp. 159-166.
21. Gálvez, V. y Waldegg, G. (2004). "Ciencia y cientificidad en la televisión educativa", en *Enseñanza de las Ciencias*, Barcelona 22 (1) 147-158.
22. Waldegg, G. (2004). "L'aritmetisation des grandeurs géométriques chez Stevin", en *Sciences et Techniques en Perspective*, II Série, vol. 8, Fascicule 1, 73-84.

23. Vázquez-Abad, J.; Brousseau, N.; Waldegg, G.; Vézina, M.; Martínez, A.; Verjovsky, J. (2004). “Fostering distributed science learning through collaborative technologies”, en *Journal of Science Education and Technology*, 13 (2) 227-232.
24. Verjovsky J. y Waldegg, G. “Analyzing beliefs and practices of a Mexican high school biology teacher”, en *Journal of Research in Science Teaching*, vol. 42 (4): 465-491.
25. Waldegg, G. “Bolzano’s Approach to the Paradoxes of Infinity. Implications for Teaching”, *Science & Education,* 14: 559-577.
26. Waldegg, G. “L’arithmetisation des grandeurs geometriques chez Stevin, *Sciences et Techniques en Perspective,* vol. 8 núm. 1 (2004) 73-83.
27. Waldegg, G. Bolzano’s Approach to the Paradoxes of Infinity Implications for Teaching. *Science & Education* (2004) 1-20.

2.1 b) Publicados en extenso en otras revistas especializadas con arbitraje

1. Figueras, O. y G. Waldegg (1987). “Algunas consideraciones sobre la enseñanza de la medición”, en *Revista Informativa del Profesor de Matemáticas*, I (5) 4-8, México.
2. Waldegg, G. (1989). “La evaluación del trabajo académico en Matemática Educativa”, en *Avance y Perspectiva*, 39 (8) 53-56, México.
3. Waldegg, G. (1990). “Contenido matemático de los *Grundlagen* de Cantor. La introducción de los números transfinitos”, en *Ciencia y Educación* 4 (1) 13-17, Guatemala.
4. Alarcón, Bonilla, Moreno, Parra, Rigo y Waldegg (1991). “La enseñanza de las ciencias y la comunidad científica”, en *Avance y Perspectiva* 10, 83-92, México.
5. Waldegg, G. (1992). “La investigación en *Educación Matemática*” en *Cuarto Nivel*, II (3) 32-37, Toluca.
6. Waldegg, G. (1997). “Sobre el origen y el significado de los números decimales”, en *Básica* (Número monográfico Las matemáticas en la escuela), año III, núm. 11, mayo-junio, 1996, pp. 54-60, México.
7. Waldegg, G. (1997). “Una historia para la enseñanza” en *Cuarto Nivel*. Investigación y Docencia, Año VI, núm. 9, febrero, 1997, pp. 27-35, Toluca.

8. Waldegg, G. (1999). "La educación matemática, ¿una disciplina científica?", en *Colección Pedagógica Universitaria,* núm. 29, 13-44, Xalapa, Ver.
9. Waldegg, G. (2000). "La resolución de problemas: del discurso a la acción", en *QUBO* Revista de *Educación Matemática*, vol. 1, N° 5, diciembre 2000, 5-9. Oficina de Bachillerato del Ministerio de Educación del Perú, Lima, Perú.
10. Bourges, P y Waldegg, G. (2003). "Matemáticas en línea. Elementos para una evaluación" en *DECISIO: saberes para la acción en educación de adultos*. Primavera 2003, 51-58, Pátzcuaro: CREFAL.
11. Waldegg, G. (2003) "La historia y la enseñanza de las matemáticas", en *Boletín de la Asociación Chilena de Educación Matemática*.

2.1 c) Publicados en extenso en memorias de congresos internacionales

1. Figueras, O. y G. Waldegg (1984). "A First Approach to Measuring (Children between 11-13 Years Old)" en J. Moser (ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 95-100, Wisconsin.

Citado en:

- Hershkowitz, Rina (1990). "Psychological Aspects of Learning Geometry", en *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. (Artículo de revisión del campo)

2. Waldegg, G. (1987). "Fenomenología didáctica del infinito", en *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 249-254, Mérida.
3. Waldegg, G. (1988). "La respuesta griega al problema de lo continuo y lo discreto", en *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 339-343, Guatemala.
4. Waldegg, G. (1994). "La notion de nombre avant l'établissement de la science analytique". *1 ère Université d'été Européenne: Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique*. 115-122, IREM, Montpellier, Fr.
5. Waldegg, G. (1994). "Factores ocultos en los procesos educativos: necesidad de explicitarlos" *Educar* 10, 33-41. *Foros Internacionales de Análisis so-*

bre Educación y Sociedad. Sria. de Educación del Estado de Jalisco, Guadalajara, Jalisco.

6. Waldegg, G. (1995). "L'épistémologie dans la recherche en didactique, est-ce qu'on peut choisir?" en *Contribution á une approche historique de l'enseignement des mathématiques*, IREM de Franche-Comté, 447-457, Besançon. Fr.
7. Waldegg, G. (1996). "Les questions de l'histoire dans la recherche en didactique: éléments méthodologiques" en *Historia e Educação Matemática*, vol. I, 277-281, Braga, Port. ISBN 972-9053-55-3.
8. Waldegg, G. (1996). «La Géométrie de Bolzano: convictions ontologiques et obstacles épistémologiques» en *Historia e Educação Matemática*, vol. II, 154-161, Braga, Port. ISBN 972-9053-55-3.
9. Waldegg, G. (1999). "Principios constructivistas para la educación matemática" en *Memorias de III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. pp. 43-51 Caracas, Venezuela.
10. Waldegg, G. (2001). "La construction et la validation de la connaissance chez Stevin" en Radelet, P. (eds.) *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique «De la maternelle à l'université»*, vol. I, pp. 381-391.Troisième université d'été européenne, Université catholique de Louvain Lovain-la-Neuve-Leuven, Bélgica, julio 1999.
11. Waldegg, G. (2002). "L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin" en Álvarez, C., Dhombres, J., Pont, J. C. (eds.): *La pensée Numérique*, pp. 73-83, Actes du Colloque de Peyresq (7-10 Sept, 1999). Association Peyresq Foyer d'Humanisme. Disponible en PDF en http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pensee.numer.htm
12. Vázquez-Abad, J., Brousseau, N., Waldegg, G., Vézina, M., Martínez Dorado, A., Paul de Verjovsky, J., Carvajal, E. & Guzmán, M.L. (2003). "An Approach to Distributed Collaborative Science Learning in a Multicultural Setting". In Constantinou & Zacharias, C. (eds.), *Proceedings of the 6th International Conference On Computer Based Learning in Science*. Volume I: New Technologies and Their Applications in Education, pp. 845-851 Department of Educational Sciences, University of Cyprus, Nicosia, Cyprus, ISBN 9963-8525-1-3.
13. Juárez, M. y Waldegg, G. (2004)). "Evaluation of the platform WebCt for the users of a collaborative learning experience in the teaching of science". In

Méndez-Vilas, A. & Mesa González, J.A. (eds.) *Advances in Technology-based Education: Towards a Knowledge-based Society*, proceedings of the Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003), vol. II, pp. 1314-1318, ISBN 84-96212-11-4.

14. Gálvez, V. y Waldegg, G. (2004) "Negotiating social representations of science in a distant collaborative learning experience", en Méndez-Vilas, A. & mesa González, J.A. (eds.) *Advances in Technology-based Education: Towards a Knowledge-based Society*, Proceedings of the Second International Conference on Multimedia on Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003). Vol. II, pp. 893-897, ISBN 84-96212-11-4.

2.1 d) Publicados en extenso en memorias de congresos locales con arbitraje

1. Moreno, L. y G. Waldegg (1991). "Epistemología ¿para qué?", en *Memorias del XI Congreso Nacional de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas* 166-170, Oaxaca.
2. Waldegg, G. (1993). "Procesos de enseñanza y aprendizaje de disciplinas específicas", en *2° Congreso Nacional de Investigación Educativa*. *Síntesis y Perspectiva*. Noviembre 10-12, México, DF.
3. Verjovsky, J. y Waldegg, G. (2003). "Creencias, prácticas y contexto. La enseñanza de la Biología en el nivel medio superior",en *Memorias del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad de Guadalajara, 18-22 de noviembre de 2003.
4. Gálvez, V. y Waldegg, G. (2003). "La negociación de significados asociados con la ciencia. Una metodología basada en ensayos individuales y la colaboración interpersonal", en *Memorias del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad de Guadalajara, 18-22 de noviembre de 2003.
5. Juárez, M. y Waldegg, G. (2003). "Comparación de la utilidad de dos dispositivos Web en una experiencia de aprendizaje colaborativo para la enseñanza de las ciencias", en *Memorias del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad de Guadalajara, 18-22 de noviembre de 2003.

2.1.e) Participación en congresos y conferencias

Internacionales

1. Sixth Annual Meeting-North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Madison, Wisconsin, EE UU 3-6 de octubre de 1984. Ponencia: "A First Approach to Measuring (Children between 11-13 Years Old)".
2. Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Mérida, Yuc. 9-11 de abril de 1987. Ponencia: "Fenomenología didáctica del infinito".
3. Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa Guatemala, Guat. 24-26 de marzo de 1988. Ponencia: "La respuesta griega al problema de lo continuo y lo discreto".
4. Primer seminario sobre la enseñanza de las matemáticas Universidad de San Carlos de Guatemala. Guatemala, Guat. 13-16 de marzo de 1989. Conferencia (por invitación) "Esquemas de respuesta ante el infinito matemático".
5. Primer seminario sobre la enseñanza de las matemáticas Universidad de San Carlos de Guatemala. Guatemala, Guat. 13-16 de marzo de 1989. Conferencia (por invitación). "La enseñanza de la matemática en el nivel superior en México".
6. 9ème Colloque Inter-I.R.E.M. Epistémologie et Histoire des Mathématique Brest Landerneau, Francia Mayo 1992. Ponencia: "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance l'instruction".
7. III Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas. México, DF. Junio 1992. Ponencia: "La ciencia analítica en la primera mitad del siglo XIX: el teorema del valor intermedio".
8. 1ère Université d'été Européenne: Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique. IREM, Montpellier, Fr. Julio 19-23, 1993. Ponencia: "La notion de nombre avant l'établissement de la science analytique".
9. HIMED-94: International Conference on History in Mathematics Education. The British Society for the History of Mathematics. Winchester, UK. Marzo 28-31 1994. Ponencia: "Historical Studies and Educational Research".

10. Foros Internacionales de Análisis sobre Educación y Sociedad. Sria. de Educación del Estado de Jalisco, Guadalajara, Jal. Abril 29, 1994. Ponencia (por invitación). "Factores ocultos en los procesos educativos: necesidad de explicitarlos".
11. I Coloquio Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia "Matemáticas, Historia y Cultura: Imágenes de una época". UAM, UNAM y CINVESTAV, México, DF. Septiembre 20-22, 1994. Ponencia: "La teoría de la recta de Bolzano".
12. 6ème Université d'été interdisciplinaire Histoire des Mathématiques. IREM-Besançon, Fr. Julio 8-13, 1995. Ponencia: "L'épistémologie dans la recherche en didactique, est-ce qu'on peut choisir?".
13. II Coloquio Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia "La continuidad en la física y en la matemática". UAM, UNAM y CINVESTAV, México, DF. Septiembre 27-29, 1995. Ponencia: "El tiempo discontinuo".
14. II Université d'été Européenne: Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique. Universidad de Braga, Portugal. Julio 24-30, 1996. Ponencia (por invitación). "Les questions de l'histoire dans la recherche en didactique: éléments méthodologiques"
15. II Université d'été Européenne: Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique. Universidad de Braga, Portugal. Julio 24-30, 1996. Ponencia: "La Géométrie de Bolzano: convictions ontologiques et obstacles épistémologiques".
16. International Meeting. Logic and Mathematical Reasoning. 6-8 de octubre de 1997: Casa de la primera imprenta de América, Centro Histórico, México, DF. Ponencia "Construction of Mathematical Objects and the Evolution of Rigor".
17. Seminario Internacional sobre Innovaciones Educativas en Ciencias Naturales y Matemáticas SEP-OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). 12-15 de octubre de 1997: Cuernavaca, Mor. Mesa de discusión: "Formación inicial del docente y su desempeño profesional".
18. III Congreso Iberoamericano de educación matemática. 26-31 de julio de 1998, Universidad Central de Venezuela, Caracas. Conferencia Central (por invitación). "Principios constructivistas para la educación matemática".
19. III Congreso Iberoamericano de educación matemática. 26-31 de julio de 1998, Universidad Central de Venezuela, Caracas. Conferencia: "La incorporación de los números racionales al dominio numérico. Análisis histórico-epistemológico".

20. III Université d'Été Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique. 14-21 de julio de 1999. Universidad Católica de Lovaina, Bélgica. Ponencia: "La construction et la validation de la connaissance chez Stevin".
21. Atelier de travail: La pensée Numérique, 7-10 de septiembre de 1999, Peyresq, Haut Provence, Fr. Ponencia: "L'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin".
22. Fifth International History, Philosophy and Science Teaching Conference: Science as Culture, 15-19 de septiembre de 1999. Como, It. Ponencia: "Ontological Convictions and Epistemological Obstacles in Bolzano's Elementary Geometry".
23. V Reunión de Didáctica de las Matemáticas del Cono Sur. Universidad de Santiago de Chile, 10-14 de enero de 2000. Conferencia inaugural: "¿Qué nos han dejado las reformas en la enseñanza de las matemáticas?".
24. V Reunión de Didáctica de las Matemáticas del Cono Sur. Universidad de Santiago de Chile, 10-14 de enero de 2000. Panel de discusión: "La educación matemática y la cultura científica del ciudadano del siglo XXI" (coordinadora).
25. III Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) y III Encuentro de Educación Matemática Región Zuliana (EDUMATZ), 12 al 15 de octubre de 2000, Facultad de Humanidades y Educación de Universidad del Zulia en Maracaibo – Venezuela. Conferencia plenaria: "Condiciones epistemológicas del conocimiento matemático en escenarios de aprendizaje social".
26. III Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) y III Encuentro de Educación Matemática Región Zuliana (EDUMATZ), 12 al 15 de octubre de 2000, Facultad de Humanidades y Educación de Universidad del Zulia en Maracaibo, Venezuela. Ponencia: "La resolución de problemas en el aula: del discurso a la acción".
27. Atelier de travail: Varie pour mieux trouver. Histoire de la notion de variation, 4-11 de septiembre de 2000, Pátzcuaro, Mich. Ponencia: "La représentation de la variation: Nicole d'Oresme et le *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*".
28. III Encuentro Internacional de Investigación Educativa: Los retos en la educación del siglo XXI. Universidad de Guadalajara, XIV. Feria Internacional del Libro de Guadalajara. 30 noviembre-1º de diciembre de 2000. Ponencia: "La

gestión escolar y los modelos de aprendizaje". Mesa: Modelos mentales, representaciones espontáneas y teorías implícitas.

29. VI Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias: Retos de la enseñanza de las ciencias en el siglo XXI, Universidad Autónoma de Barcelona, 12 al 15 de septiembre de 2001. Mesa Redonda: "Reformas en la enseñanza de las Ciencias en distintos países: dificultades y retos" (coordinadora).
30. Primer Encuentro Internacional de Educación. Valores, calidad y evaluación. Editorial Santillana. Ciudad de México 15-16 de febrero de 2002. Conferencia: "La ciencia y la tecnología en la educación. Calidad y valores".
31. Sixth International Conference on Computer Based Sciencie, Universidad de Chipre, 5-10 septiembre 2003. Ponencia: "An Approach to Distributed Collaborative Science Learning in a Multicultural Setting". J. Vázquez-Abad, N. Brousseau, G. Waldegg, A. Martínez Dorado, J. Paul Verjovski, M. Vézina, E. Carvajal, M. Guzmán.
32. 70e Congrès de l'ACFAS, Québec. Brousseau, N., Vézina, M., Vázquez-Abad, J., Waldegg, G., Chouinard, R., Martínez Dorado, A., Paul Verjovski, J. (2002) Projet TACTICS: Une expérience avec des élèves mexicains et québécois du deuxième cycle du secondaire.
33. 71e Congrès de l'ACFAS, 22-23 mayo 2003. Rimouski. Brousseau, N., Vézina, M., Vázquez-Abad, J., Chouinard, R., Waldegg, G., Martínez Dorado, A., Paul Verjovski, J. (2003) Projet TACTICS: Élaboration d'une communauté d'étude et de pratique géographiquement distribuée.
34. Vázquez-Abad, J., Brousseau, N., Waldegg C, G., Vézina, M., Martínez Dorado, A., Paul Verjovski J. (2003) Fostering distributed science learning through collaborative technologies. Presented to the CAL03 Conference, Belfast, UK, April 2003.
35. Vázquez-Abad, J., Waldegg, G., Brousseau, N., Vézina, M., Carvajal, E., & Guzmán, M. L. (2003). "Setting-up a distributed science learning community integrating collaborative technologies". Presented to the 2003 Conference of the National Association for Research in Science Teaching. Philadelphia, Mars 23-26.
36. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (M-ICTE 2003), Badajoz, España

3-6 diciembre, 2003. Ponencia: "Evaluation of the platform WebCt for the users of a collaborative learning experience in the teaching of science" M. Juárez y G. Waldegg (Participación virtual).

37. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003). Badajoz, España 3-6 diciembre, 2003. Ponencia: "Negotiating social representations of science in a distant collaborative learning experience", V. Gálvez y G. Waldegg (Participación virtual).

38. Tenth International Congress of Mathematical Education (ICME-10) Copenhagen in July 4-11, 2004 Topic Study Group on the Role of History of Mathematics in Mathematics Education (TSG17). Invited Speaker "Problem solving, collaborative learning and the History of Mathematics. An experience with in service secondary teachers".

Nacionales

1. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemática Centro Regional de Tecnología Educativa. Universidad de Guadalajara, Guad., Jal. 9 de noviembre de 1984. Conferencia: "Dificultades al concebir y aplicar la medición".

2. Foro de Análisis sobre Educación Matemática. Centro de Investigación de Didáctica Aplicada, Universidad Autónoma de Nayarit, Tepic, Nay. 10-12 de noviembre de 1984. Ponencia: "Conceptos matemáticos en la escuela secundaria".

3. Primera Reunión de Evaluación de la Maestría en Ciencias, especialidad Matemática Educativa La Malintzin, Tlaxcala, México. 26-29 de agosto de 1985 Ponencia: "Evaluación de los dos programas de maestría".

4. VIII Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas. Guadalajara, Jal. 28-30 de noviembre de 1985. Ponencia: "Algunas consideraciones sobre la enseñanza de la medición".

5. VIII Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas. Guadalajara, Jal. 28-30 de noviembre de 1985. Ponencia: "Los procesos infinitos y la enseñanza del calculo".

6. Universidad de Guadalajara, Fac. de Ciencias. 11 de abril de 1986. Conferencia: "Contenido matemático de los *Grundlagen* de Cantor".

7. Reunión Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich. 11-16 de agosto de 1986. Mesa redonda: "Alternativas para la enseñanza del cálculo".
8. Décimo Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas. Acapulco, Gro. Octubre 1989. Ponencia: "Algunas consideraciones sobre los contenidos matemáticos de los cursos introductorios del nivel superior".
9. Encuentro interinstitucional sobre el postgrado en educación Universidad Pedagógica Nacional, México, DF. Ponencia: "Maestría en Matemática Educativa".
10. UNAM-Facultad de Ciencias México, DF. 6 de junio de 1991. Conferencia: "El significado de *Las paradojas del infinito* de B. Bolzano para la conceptualización del infinito actual y de la teoría de conjuntos".
11. XI Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas. Oaxaca, Oax. 24, 25 y 26, octubre 1991. Ponencia: "Epistemología ¿para qué?".
12. XXXIV Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana de Física, México, DF. Octubre 1991. Ponencia: "El Principio de conservación de la energía: convergencia de ideas".
13. Foro "Psicología y Escuela". Facultad de Psicología de la Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro, Qro. Octubre 21-23, 1992. Ponencia: "la construcción del número en Stevin".
14. Semana de la Escuela Pública Mexicana. SEP. México, DF. 27 de noviembre 1992. Mesa redonda: "El conocimiento del educando y la incidencia en los estudios del desarrollo curricular".
15. Segundo Congreso Nacional de Investigación Educativa. Congreso Nacional Temático: Procesos de Enseñanza y Aprendizaje. Universidad Veracruzana. Jalapa, Ver. Octubre 15-18, 1993. Ponencia: "Procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas".
16. Segundo Congreso Nacional de Investigación Educativa. Congreso Nacional de Síntesis y Perspectivas. Centro Médico Nacional, México DF. Noviembre 10-12, 1993. Ponencia: "Conclusiones y recomendaciones del área de Procesos de enseñanza y aprendizaje de disciplinas específicas".
17. Segundo Congreso Nacional de Investigación Educativa. Congreso Nacional de Síntesis y Perspectivas. Centro Médico Nacional, México DF. Noviembre

10-12, 1993. Ponencia: "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Síntesis y perspectivas".

18. Primera Jornada sobre la enseñanza de las ciencias matemáticas en el nivel superior, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jal. Diciembre 9-10, 1993. Ponencia: "La historia de la matemática en la enseñanza".
19. Coloquio "Grandes transformaciones en el pensamiento científico". MATHEMA, UNAM, México, DF. Marzo 1-2, 1993. Ponencia: "Cuando la luz cambió su naturaleza".
20. XII Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, Qro. Octubre 21-23, 1993. Ponencia: "La historia de las matemáticas en la Educación".
21. IV Jornadas Académicas Nacionales de Educación Media, Escuela Normal Superior de Michoacán, Morelia, Mich. Marzo 9-11, 1994. Ponencia: "La historia de la matemática y el trabajo en el aula".
22. "Matemáticas: Ciencia y Educación". Mesa redonda organizada por la Benemérita Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística. México, DF. Octubre 13, 1994.
23. XXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, Qro. Octubre 2-8, 1994. Ponencia: "La teoría de la recta de Bolzano".
24. Ciclo de Conferencias "Hablemos los viernes de ciencia", Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF. Septiembre, 29, 1994. Ponencia: "Sustento epistemológico del concepto de número de Stevin".
25. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Universidad Autónoma de Colima, Colima, Col. Octubre 2-8, 1995. Ponencia: "La formalización de la geometría a principios del siglo XIX".
26. III Congreso Nacional de Investigación Educativa. Universidad Pedagógica Nacional. México, DF. 25, 26 y 27 de Octubre 1995. Simposio: "Carácter interdisciplinario de la investigación en didáctica".
27. III Congreso Nacional de Investigación Educativa. Universidad Pedagógica Nacional. México, DF. 25, 26 y 27 de octubre 1995. Ponencia: "Matemáticas: Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual".

28. Ciclo: Metodología de la Investigación en Educación Matemática. Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado. Maestría en Educación Matemática. México, DF. 28 de febrero de 1995. Conferencia: "La naturaleza interdisciplinaria del fenómeno educativo".
29. Conferencias de Cálculo. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. CU. México, DF. 15 de noviembre 1995. Conferencia: "El Cálculo en los *Principia*".
30. XXIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, SLP. Octubre 6-12, 1996. Ponencia: "Historia. Lógica y Fundamentos".
31. Presentación de la *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, Casa de la Cultura de Aguascalientes, Aguascalientes, Ags. 28 de febrero de 1997. Ponencia: "Las publicaciones científicas: historia y desarrollo".
32. VI Jornada Académica Nacional de Educación Media 24 de abril de 1997. Escuela Normal Superior de Michoacán, Morelia, Mich. Conferencia "Bases epistemológicas de la enseñanza de la ciencia".
33. XXX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, 30 de septiembre de 1997: Universidad Autónoma de Aguascalientes. Aguascalientes, Ags. Ponencia: "Cuatro formas de usar la historia en la enseñanza de las matemáticas".
34. XIV Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, 23-25 de octubre de 1997. Esc. Normal Superior núm. 1 del Estado de México, Toluca, Edo. Mex. Ponencia: "La metáfora del constructivismo".
35. XIV Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas. 23-25 de octubre de 1997. Esc. Normal Superior núm. 1 del Estado de México, Toluca, Edo. Mex. Mesa redonda "Los medios de difusión de la investigación en educación matemática".
36. Reunión académica de matemáticas. 30 de junio de 1998. Instituto de Servicios Educativos del Estado de Coahuila, Dirección de Educación Secundaria Técnica. Conferencia magna: "Constructivismo".
37. Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas: La geometría detrás del pensamiento, el pensamiento detrás de la geometría. 26-27 de marzo de 1999,

Universidad Nacional Autónoma de México. Ponencia: "Stevin y el sustento geométrico de la aritmética".

38. V Congreso Nacional de Investigación Educativa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad Autónoma de Aguascalientes, 30-31 de octubre y 1-2 de noviembre de 1999. Mesa redonda: "Perspectivas metodológicas en la investigación en educación matemática".
39. Encuentro "La enseñanza y la divulgación de la ciencia hacia el siglo XXI". Centro de Investigación y Desarrollo del Estado de Michoacán, 3-4 de diciembre de 1999. Conferencia: "La investigación educativa y la enseñanza de las ciencias".
40. Encuentro "La enseñanza y la divulgación de la ciencia hacia el siglo XXI". Centro de Investigación y Desarrollo del Estado de Michoacán, 3-4 de diciembre de 1999. Debate: "La Educación científica hacia el siglo XXI".
41. XV Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. 9-11 de diciembre de 1999. Mesa redonda: "¿Qué pasa con los libros de texto de secundaria?"
42. III Congreso Nacional de Educación. Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación. México, DF. 20 de marzo de 2000. Panel: "Los niños y la ciencia".
43. XXXIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Saltillo, Coah. 8-13 de octubre de 2000. Taller para maestros: "Desarrollo de conceptos matemáticos con un enfoque constructivista".
44. III Congreso Regional de Investigación Educativa: Investigación para el desarrollo educativo. Guadalajara, Jal. 25, 26 y 27 de octubre de 2000. Secretaría de Educación de Jalisco, Consejo Mexicano de Investigación Educativa. Conferencia inaugural: "¿Para qué investigar en educación?".
45. Maestría en Innovación Educativa, Universidad de Sonora. 23 de noviembre de 2000. Conferencia: "Medios y fines de la investigación educativa".
46. III Simposio Regional de Investigación Educativa. Universidad Autónoma de Yucatán, 4-6 de diciembre de 2000. Conferencia de clausura: "Usos y contribuciones de la investigación educativa".

47. Segunda Bienal de Investigación Educativa. Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. Toluca, 7 y 8 de diciembre de 2000. Conferencia de clausura: "La investigación educativa: temas de debate".
48. Seminario "El papel de los científicos e ingenieros en la preparación de maestros para la enseñanza de la ciencia". Fundación México-Estados Unidos para la Ciencia, Academia Mexicana de las Ciencias y Dirección General de Divulgación de la Ciencia UNAM. 31 de mayo, 2001. Universum Museo de las Ciencias. Ponencia: "Ciencia y docencia".
49. VI Congreso Nacional de Investigación Educativa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad Autónoma de Colima, 6-10 de noviembre de 2001. Mesa redonda: "Investigación educativa, generación y usos del conocimiento educativo" (coordinadora).
50. VII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad de Guadalajara, 18-22 de noviembre de 2003. Ponencia: "Creencias, prácticas y contexto. La enseñanza de la Biología en el nivel medio superior" (Janet Verjovsky y Guillermina Waldegg).
51. VII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad de Guadalajara, 18-22 de noviembre de 2003. Ponencia: "La negociación de significados asociados con la ciencia. Una metodología basada en ensayos individuales y la colaboración interpersonal" (Víctor Gálvez y Guillermina Waldegg).
52. VII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad de Guadalajara, 18-22 de noviembre de 2003. Ponencia: "Comparación de la utilidad de dos dispositivos Web en una experiencia de aprendizaje colaborativo para la enseñanza de las ciencias" (Manuel Juárez y Guillermina Waldegg).

2.2 Artículos de revisión en libros o revistas

1. Waldegg, G. (1993). "Estudios sobre el desarrollo conceptual de la matemática y su vinculación con la educación", en Bonilla, Block y Waldegg (coords.) *La investigación Educativa en los ochenta, perspectivas para los noventa.* Cua-

derno 10, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Congreso Nacional de Investigación Educativa, 46-49, México.

2. Block, D. y G. Waldegg (coords.) (1995). “Matemáticas” capítulo del libro Waldegg, G. (coord.) (1995). *Procesos de enseñanza y aprendizaje II, vol. 2*, 23-130. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa / Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano.

2.3 Capítulos en libros especializados

1. Rigo, M. y G. Waldegg (1993). “El infinito y la continuidad en la matemática griega”, en Waldegg, G. (ed.) *Seminario de Historia y Epistemología de la Ciencia*, 37-50. México: SMTC-CINVESTAV.
2. Waldegg, G. (1994). “Los educadores de la matemática: una comunidad de enlace”, en Sánchez, E. y M. Santos (eds.) *Perspectivas en Educación Matemática*. DME-CINVESTAV, 69-77. Reeditado por Grupo Editorial Iberoamérica, 1996, 75-83, México. ISBN 970-625-137-5.
3. Moreno, L. y G. Waldegg (2000). “An Epistemological History Of Number And Variation” en Katz, V. (Ed) *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, Mathematical Association of America, 183-190, Washington D.C, ISBN 0-88385-163-6.

Registrado en:

BSHM (British Society for the History of Mathematics) Abstracts. Disponible en www.dcs.warwick.ac.uk/bshhm/abs.html

Reseñado en:

- Deakin, Michael A. B. (2001): ZDM 2001 Vol. 33 (5) pp. 137, 138.

Citado en:

- Sáenz-Ludlow, A. (2003) “A collective chain of signification in conceptualizing fractions: A case of a fourth-grade class”, en *Journal of Mathematical Behavior* 22 (2003) 181-211.

4. Waldegg, G. (2001). “Los nuevos modelos para el aprendizaje de las matemáticas y la gestión escolar”, en Matute, E. y Romo, R.M. (coords.). *Los retos de la educación del siglo XXI*, pp. 157-175. Guadalajara, Universidad de Guadalajara. ISBN 970-27-0126-0.
5. Moreno, L. y Waldegg, G. (2001): “Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas”, Cap. 3 del Libro Rico, L. (coord.) *Didáctica de las ma-*

temáticas, Editorial Síntesis (en prensa). Madrid. (Reproducido en *Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional, Dirección de la calidad de la educación, Bogotá, Colombia, pp. 40-66).

6. Waldegg, G. (2002). "El tiempo discontinuo" en Álvarez, C. y Barahona, A. (eds.) *La continuidad en la ciencia*, Cap. XI, pp. 262-278, México: Fondo de Cultura Económica, Universidad Nacional Autónoma de México. ISBN 968-16-6543-0.
7. Waldegg, G. (2002). "La ciencia y la tecnología ante la sociedad y sus valores", en Ornelas, C. (comp.) *Valores, calidad y educación*, pp. 119-135. México: Santillana (Aula XXI). ISBN 970-29-0184-7.
8. Castillejos, A., Catalá, R.M., Hernández, M. E., Sánchez, A., Waldegg, G. (2002): Capítulo 5: "Materiales y medios educativos", en Waldegg, G., Barahona, A., Macedo, B., Sánchez, A. (coords.) (2002). *Retos y perspectivas de las ciencias naturales en la escuela secundaria*. México: SEP/OREALC/UNESCO (Biblioteca para la actualización del maestro), pp. 163, ISBN 970-18-9975-X SEP, pp. 103-124.
9. Waldegg, G. (2002). Capítulo 6: "Participación de las instituciones de educación superior y otras organizaciones científicas y académicas en la enseñanza de las ciencias", en Waldegg, G., Barahona, A., Macedo, B., Sánchez, A. (coords.) (2002). *Retos y perspectivas de las Ciencias Naturales en la escuela secundaria*. México: SEP/OREALC/UNESCO (Biblioteca para la actualización del maestro), pp. 163, ISBN 970-18-9975-X SEP, pp. 125-133.
10. López y Mota, A. y Waldegg, G. (2002). Capítulo 7: "La didáctica de las ciencias como campo de estudio" en Waldegg, G.; Barahona, A.; Macedo, B. y Sánchez, A. (coords.) (2002). *Retos y perspectivas de las ciencias naturales en la escuela secundaria*. México: SEP/OREALC/UNESCO (Biblioteca para la actualización del maestro), pp. 163, ISBN 970-18-9975-X SEP, pp. 136-151.
11. Waldegg, G. (2004). "La représentation de la variation: Nicole d'Oresme et le *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*" en *Variar para encontrar* (Alvarez, C., Martinez, R., Radelet, P. y Lacki, J., Eds.) pp. 205-222. Seminario de Historia de la Ciencia: Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Católica de Lovaina, Universidad de Ginebra. (Mathema). ISBN 970-32-0941-6. México.

2.4 Libros especializados

1. Ávila, A. y Waldegg, G. (1997). *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*. México: Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, pp. 62. ISBN 968-29-8823-3

Reseñado en:

- Valiente, Santiago (1999). "Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos", en *Educación Matemática* 11 (2), 146-149.
- Marroquín, E. J. (2003), en *DECISIO*. Saberes para la acción en educación de adultos. Primavera 2003, 65.

Citado en:

- Amador Gómez, María Esther (1999). "Theorical and practical aspects of the remote course for mathematical advisers" *XIX Conferencia Mundial sobre Educación Abierta y a Distancia. La nueva Frontera Educativa: enseñando y aprendiendo en un mundo interconectado*. Viena, Austria http://www.ilce.edu.mx/icde_ilce/ponencia/viena/ponencia/p02819.htm
- Delprato, María Fernanda (2002). *Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática*. Tesis de maestría en ciencias, especialidad en investigaciones educativas, DIE-CINVESTAV.

2.5 Edición de libros especializados

1. Waldegg, G. (ed.) (1993) *Seminario de Historia y Epistemología de la Ciencia 1992*. México: SMTC-CINVESTAV, 107 pp.
2. Bonilla, E., D. Block y G. Waldegg (coords.) (1993). *La investigación educativa en los ochenta, perspectivas para los noventa.* Cuaderno 10, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. México: Congreso Nacional de Investigación Educativa, 70 pp.

Citado en:

- Flores Macías, Rosa del Carmen (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación*. Tesis de doctorado en Educación. Doctorado Interinstitucional en Educación, Centro de Ciencias Sociales y Humanidades. Universidad Autónoma de Aguascalientes. Junio 2002.

3. Waldegg, G. (coord.) (1995). *Procesos de enseñanza y aprendizaje II,* vol. 1. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa / Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano, pp. 367, ISBN 968-7542-02-0.

4. Waldegg, G. (coord.) (1995). *Procesos de enseñanza y aprendizaje II, vol. 2*. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa / Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano, pp. 267, ISBN 968-7542-047.

Citado en:

- Díaz Barriga, Hernández, García y Muriá (1998). "Una aproximación al análisis de la influencia de la obra piagetiana en la educación" ,en Castorina *et al*: *Piaget en la educación. Debate en torno a sus aportaciones*. México: Paidós Educador, UNAM-CESU, ISBN: 968-853-381-5.

5. Waldegg, G. (ed.) (1995) *Seminario de Epistemología e historia de la ciencia 1993-1994*. México: SMTC-CINVESTAV, 91 pp.
6. Waldegg, G. y Block, D. (coords.) (1997). *Estudios en didáctica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, SA, pp. 288, ISBN 970-625-169-3
7. Waldegg, G. (1997) (ed.). *La investigación educativa en México, 1996-1997*. Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa. Mérida, Yuc.: COMIE-UADY, pp. 469.
8. Waldegg, G. (ed.) (1997). *Conferencias magistrales del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Consejo Mexicano de Investigación Educativa/Universidad de Yucatán, México, ISBN: 968-7542-20-9.

Citado en:

- Martínez Jaime, M.L. (s/f). *La investigación en educación física. Una necesidad para transformar la práctica docente*. Dirección general de Educación Física, SEP. Disponible en http://www.cpar.sep.gob.mx/dgef/index.html

9. Waldegg, G. (ed.) (1999). *Conferencias magistrales del V Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Consejo Mexicano de Investigación Educativa/Universidad de Colima, México, ISBN: 968-7542-17-9.
10. Waldegg, G., Barahona, A., Macedo, B., Sánchez, A. (coords.) (2002). *Retos y perspectivas de las ciencias naturales en la escuela secundaria*. México: SEP/OREALC/UNESCO (Biblioteca para la actualización del maestro), pp. 163, ISBN 970-18-9975-X SEP.
11. Moreno Armella, L.E, Waldegg, G. *Aprendizaje, matemáticas y tecnología. Una visión integral para el maestro.* Aula XXI-Santillana, pp. 114 ISBN:970-29-1198-2 .

2.6 Publicaciones resultado de tesis dirigidas por el investigador

1. Salinas, Patricia (1987).“Obstrucciones e imágenes conceptuales en el aprendizaje de los números reales” en *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa* Mérida, Yuc. Abril, 1987.
2. Ávalos, Alejandra (1997). “Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización” en *Educación Matemática*, 9(2) 154-163.
3. Moreno, María Lucía (1998). “Concepciones de los maestros de primaria en torno a la medición. Experiencias en un taller de actualización” en *Educación Matemática*, 10(2) 152-154.
4. Guzmán Zazueta, Ma. Luisa (2001). “Formación, concepciones y práctica de los profesores de matemáticas” en *Educación Matemática* 13 (3) 93-106.
5. Gálvez Díaz, Víctor (2001). “Las representaciones de la ciencia en la Telesecundaria” en *Educación 2001*, 73, 27-32.
6. De Agüero Servín, Mercedes (2001). “Mathematizing: Problem Solving Strategies in Everyday Work”. *Unlocking Human Potential to Learn Conference*. Canadian Centre for UNESCO’s International Network on Technical and Vocational Education, Winnepeg, Canadá. Disponible en http://www.umanitoba.ca/unevoc/conference/papers/deaguero.pdf.
7. Carvajal, Enna y Gómez, Rocío (2002). “Concepciones y representaciones de las maestros de secundaria y bachillerato sobre la naturaleza, el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias” en *Revista Mexicana de Investigación Educativa* 7 (16) 577-602.
8. Verjovsky, Janet (2003). “Beliefs and practices of teachers participating in a project of learning communities with collaborative technology”. Proceedings del International Conference on Information and Communication Technologies in Education (ICTE 2002) Badajoz, España (20-23 November 2002) ISBN Vol. I: 84-95251-77-9 pp. 251-255.
9. Sánchez Pérez, Carmina (2003). “Autoaprendizaje de las matemáticas en los grupos del INEA” en DECISIO. Saberes para la acción en educación de adultos. Primavera 2003, pp. 12-16.

10. Verjovsky, J., Waldegg, G. "Analyzing Beliefs and Practices of a Mexican High School Biology Teacher" *J. of Research in Science Teaching* Vol. 42 (2005) núm. 4 pp. 465-491.

2.10 Desarrollo curricular y teórico-metodológico

2.10 a) Reportes finales de investigación teórico-metodológica solicitados por terceros

1. Rigo, M., Waldegg, G. (1991). "Algunas observaciones sobre el proyecto de maestría en enseñanza de las ciencias" para la Universidad de Guadalajara,

2.10 b) Reportes de diseño original de planes completos de estudio solicitados por terceros

1. Alarcón, Bromberg, Parra, Waldegg (1988). *Maestría en Educación Matemática*. Escuela Normal Superior núm. 1 del Estado de México.
2. Carrillo, E. et al (1990). *Tronco común de las licenciaturas de la Universidad de Quintana Roo*.

2.10 c)Reportes de diseños de cursos solicitados por terceros

1. Rigo, M., Waldegg, G.: *Historia y Fundamentos de la Matemática*. Curso Taller para la maestría en Educación matemática de la Esc. Normal Superior núm. 1 del Estado de México, 1990-1991.
2. Moreno, L., Waldegg, G. (1990). *Taller de técnicas de investigación.* Curso del Tronco común de la Universidad de Quintana Roo.
3. Moreno, L., Waldegg, G. (1990). *Conocimiento Científico.* Curso del Tronco Común de la Universidad de Quintana Roo.

2.11 Materiales de docencia

2.11 a) Libros de texto publicados y en uso

1. Moreno, L. y G. Waldegg, (1986). *Cálculo Avanzado -Introducción al Análisis-1a Parte*. México: Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. 197 pp.

2. Moreno, L. y G. Waldegg, (1986). *Cálculo Avanzado –Introducción al Análisis– 2a. parte*. México: Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. 232 pp.
3. Ávila, A., O. Figueras., E. Mancera y G. Waldegg (1986). *Nuestras cuentas diarias. Matemáticas 1a. Parte, volumen 1. Primaria para Adultos*. México: Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, 246 pp. ISBN 968-29-2014-2 (Obra completa), ISBN 968-29-2016-7 (1a. Parte, volumen 1). Primera reedición 1996, Tercera reimpresión 1999, Cuarta reimpresión 1999. En línea: http://www.conevyt.org.mx/inea/biblioteca/num_ctas_diarias1.htm
4. Ávila, A., O. Figueras., E. Mancera y G. Waldegg (1987). *Nuestras cuentas diarias. Matemáticas 1a. Parte, volumen 2. Primaria para adultos.* México: Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, 250 pp. ISBN 968-29-2014-2 (Obra completa), ISBN 968-29-2016-7 (1a. Parte, volumen 2). Primera reedición 1997. Primera reimpresión 1999. En línea: http://www.conevyt.org.mx/inea/biblioteca/num_ctas_diarias2.htm
5. Alarcón, J., S. Cárdenas, G. Lucio, B. Parra, J. Rivaud, A. Rojo y G. Waldegg (1991). *Matemáticas Enseñanza Media Básica 2.* México: SEP-FCE, 446 pp. ISBN 968-16-3625-2.
6. Alarcón, J., S. Cárdenas, G. Lucio, B. Parra, J. Rivaud, A. Rojo y G. Waldegg (1993). *Matemáticas Enseñanza Media Básica 3*. México: SEP-FCE, 421 pp. ISBN 968-16-3861-1.
7. Parra, B. M., S E. Sánchez y G. Waldegg (1993) *Matemáticas, 1er año Secundaria*. México: McGraw-Hill, 212 pp. ISBN 968-4178-064-5.
8. Chamizo, J. A., Tonda, J., Trigueros, M. y Waldegg, G. (1996) *Libro para el maestro de física de la escuela secundaria*. México: SEP, 239 pp. ISBN 968-29-5323-5.
9. Waldegg, G. (1996). *Física. Guía para el taller de maestros. Estrategias para el aprovechamiento de los libros del maestro*. México: Secretaría de Educación Pública. 30 pp. ISBN 968-29-9078-5.
10. Chamizo, J. A., Sánchez, A., Tonda, J., Trigueros, M. y Waldegg, G. (1997). *La enseñanza de la física en la escuela secundaria. Guía de estudio*. México: Secretaría de Educación Pública. 118 pp. ISBN 968-29-9458-6 y Programa para la transformación y el fortalecimiento académico de las escuelas normales, SEP ISBN 970-18-0276-4.

11. Chamizo, J. A., Sánchez, A., Tonda, J., Trigueros, M. y Waldegg, G. (comp.) (1997). *La enseñanza de la física en la escuela secundaria. Lecturas*. México: Secretaría de Educación Pública. 303 pp. ISBN 968-29-9457-8 y Programa para la transformación y el fortalecimiento académico de las escuelas normales, SEP ISBN 970-18-0275-6.
12. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (1998). *Matemáticas en Contexto 1er año Secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 250 pp. ISBN 970-625-171-5. Usado como libro de texto en la Heroica Escuela Naval Militar. Primera edición Editorial Esfinge (2004), ISBN 970-647-896-5
13. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (1998). *Matemáticas en Contexto 2o. año Secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica 243 pp. ISBN 970-625-172-3 Primera edición Editorial Esfinge (2004), ISBN 970-647-895-7.
14. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (1998). *Matemáticas en Contexto 3er año Secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica 256 pp. ISBN 970-625-173-1. Primera edición Editorial Esfinge (2004), ISBN 970-647-897-3.
15. Ávila, A., Balbuena, H., Fuenlabrada, I. y Waldegg, G. (2000). *Matemáticas Quinto grado*. México: Secretaría de Educación Pública. 192 pp, ISBN 970-18-4918-3.
16. Balbuena, H., Block, D., Fuenlabrada, I. y Waldegg, G. (2001). *Matemáticas Sexto grado*. México: Secretaría de Educación Pública. 192 pp, ISBN 970-18-5129-3.
17. Trigueros, M. y Waldegg, G. (2003). *Física 2º año de secundaria*. México: Editorial Santillana. 192 pp, ISBN 970-29-0656-3
18. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (2004). *Matemáticas en Contexto. Guía para el maestro*. México: Editorial Esfinge, 69 pp.
19. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (2004). *Matemáticas en Contexto 1*. México: Editorial Esfinge, 250 pp. ISBN 970-647-895-7.
20. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (2004). *Matemáticas en Contexto 2*. México: Editorial Esfinge, 243 pp. ISBN 970-647-896-5.
21. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (2004). *Matemáticas en Contexto 3*. México: Editorial Esfinge, 255 pp. ISBN 970-647-897-3.
22. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (2004). *Matemáticas en Contexto 1, 2 y 3. Guía para el maestro*. México: Editorial Esfinge, 54 pp. ISBN 970-647-913-9.

2.12 Difusión científica

2.12 b) Trabajos audiovisuales

1. Figueras, O., Fregona, D., Padilla, V., Waldegg, G.: "Carácter significativo y funcional de las medidas antiguas". Ficha técnica para un programa de televisión editado por el Canal 11 IPN. México, 1983.
2. Figueras, O., Fregona, D., Padilla, V., Waldegg, G.: "El hombre, medida de todas las cosas". Ficha técnica para un programa de televisión editado por el Canal 11 IPN. México, 1983.
3. Block, D.(coord.), Ávila, A. y G. Waldegg: "El papel de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas" (audio-casete 70 min.). Programa de actualización del maestro, Serie: El conocimiento en la escuela. SEP-UPN, 1993.
4. Sánchez, A. (coord.), Chamizo, J.A. y Waldegg, G.: "Las ideas de los niños y su desarrollo cognitivo" (video) Conferencia temática del 4º semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, SEP, 1999.
5. Waldegg, G. (Coordinadora académica y moderadora), Vázquez, T.; Moreno, L.; y Trigueros, M.: "Educación en ciencias y uso de las tecnologías de información y comunicación (TIC)" Video del Ciclo *Las bases educativas del siglo XXI*. Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV. Octubre 2001.

2.12 c) Artículos y reseñas

1. González, D., Waldegg, G. (1989). "Reseña del libro Morris Kline: El fracaso de la matemática moderna" en *Educación Matemática*. 1 (1) 28-32 México.
2. Waldegg, G.: (1990). "Reseña de la Serie Opera Prima", Publ. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV: núm. 1 Ulloa, J.R.: Razonamiento verbal y estructura formal del problema matemático. 57 pp, México, 1988; núm. 3 Pita, C.: Los infinitésimos en el siglo XVIII, 149 pp, México, 1989" en *Educación Matemática*, 2 (3) 65-67, México.
3. Waldegg, G. (1992). "Las paradojas del infinito de Bernard Bolzano" en *Avance y Perspectiva*, 11, 123-126.

Registrado en:

- FILOS Base de datos sobre Filosofía en México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

4. Ávila, A., D. Block y G. Waldegg (1994). “La investigación en educación matemática en México durante la década 1982-1992: Una mirada crítica”, en *Boletín Informativo del Comité Interamericano de Educación Matemática,* 2 (2), 7-14.
5. Waldegg, G. (1994). Reseña del libro: Gibilisco, Stan: *En busca del infinito. Rompecabezas, paradojas y enigmas,* en *Educación Matemática*, 6 (1) 110-112.
6. Waldegg, G. (1996). Reseña del libro: Castorina, J.A. *et al*: Piaget-Vigotsky: *Contribuciones para replantear el debate*, en *Educación Matemática*, 8 (3) 109-114.
7. Waldegg, G. (1997). “La literatura científica” en *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, II, (3) 149-156 enero-junio, 1997.
8. Waldegg, G. (1999). Reseña del libro: Castorina, J. A. et al: Piaget en la Educación. Debate en torno a sus aportaciones en *Educación Matemática*, 11 (1) 154-156.
9. Waldegg, G. (2001). “Panorama actual de la investigación educativa en México” en *Educación 2001*, VI núm. 70, marzo, pp. 43-48
10. Waldegg, G. (2002) Reseña del libro: Matute, E. y Romo, R.M. (coords.). *Los retos de la educación del siglo XXI*. Guadalajara, Universidad de Guadalajara, en *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 7 (14) 181-189.
11. Waldegg, G. (2003). “Bases neurológicas del aprendizaje”. Reseña del Libro: OCDE (2003). *La comprensión del cerebro. Hacia una nueva ciencia del aprendizaje*. Primera edición en español. México, Santilla (Aula XXI), ISBN: 970-29-0972-4. 167 pp. En *Educación Matemática* 15 (3) 175-178.

2.12 d) Traducciones especializadas

1. Bourlet, Carlo (1907). “La geometría descriptiva en el Conservatorio de Artes y Oficios de París” en *L’ Enseignement Mathématique* 9, 89-93. Trad. G. Waldegg (1997) *Educación Matemática* 9 (2) 137-139.
2. “Encuesta sobre los métodos de trabajo de los matemáticos” en *L’Enseignement Mathématique* IV (1902) y VI (1904). Trad. G. Waldegg (1997) *Educación Matemática* 9(3) 97-100. Sección Historia de la Educación Matemática.

3. Klein, Felix (1905). "De la enseñanza de las ciencias matemáticas y físicas en las universidades y escuelas técnicas superiores" en *L'Enseignement Mathématique*, 8ème année, 1906, pp. 5-25. Trad. G. Waldegg (1998) *Educación Matemática* 10(1) 99-105 y 10(2) 133-139 Sección Historia de la Educación Matemática.
4. Gonseth, Ferdinand (1932). "La verdad matemática y la realidad" en *L' Enseignement Mathématique*, año 31, 1932, pp. 96-114. Trad. G. Waldegg (1998) *Educación Matemática* 10(3) 128-143 Sección Historia de la Educación Matemática.
5. Loria, Gino (1918). "Los Nombres y las cosas" en *L'Enseignement Mathématique*, 20ème année, 1918, pp. 238-244. Trad. G. Waldegg (1999) *Educación matemática* 11(1) 143-148 Sección Historia de la Educación Matemática.
6. Hilbert, D. (1918). "El pensamiento axiomático" en *L'Enseignement Mathématique*, 20ème année, 1918, pp. 122-136. Trad. G. Waldegg (1999) *Educación Matemática* 11(2) 128-136. Sección Historia de la Educación Matemática.
7. Lebesgue, H. (1932). "Sobre la medida de las magnitudes (1a. parte)" en *L' Enseignement Mathématique*, 32ème année, 1931, pp. 173-181. Trad. G. Waldegg (1999) *Educación Matemática*, 11(3) 120-126, Sección Historia de la Educación Matemática.

3. Formación de recursos humanos

3.1 Cursos teóricos y/o prácticos

Maestría cerrada. Sección de Matemática Educativa

1. Historia del cálculo 48 hrs. II semestre 1981
2. Álgebra y geometría 80 hrs. I semestre 1982
3. Curso básico de matemáticas 80 hrs. I semestre 1982
4. Geometría I 80 hrs. II semestre 1982
5. Historia del cálculo 48 hrs. I semestre 1983
6. Curso propedéutico 80 hrs. II semestre 1983
7. Curso básico de matemáticas 80 hrs. II semestre 1984

8. Curso propedéutico 80 hrs. I semestre 1985
9. Teorías del aprendizaje 48 hrs. I semestre 1985
10. Curso básico de matemáticas 80 hrs. II semestre 1985
11. Análisis 48 hrs. I semestre 1988

Seminarios. Sección de Matemática Educativa

12. Los cursos de cálculo de la preparatoria. 32 hrs. II semestre 1981
13. Habilidades y conceptos geométricos. 32 hrs. II semestre 1982
14. Habilidades geométricas. 32 hrs. I semestre 1983
15. Historia de la medida. 32 hrs. II semestre 1983

Maestría abierta. Sección de Matemática Educativa

16. Análisis I 20 hrs. II semestre 1981. Hermosillo, Son.
17. Análisis I 20 hrs. II semestre 1981. Culiacán, Sin.
18. Análisis I 20 hrs. II semestre 1982. Mérida, Yuc.
19. Análisis I 20 hrs. II semestre 1982. Monterrey, N.L.
20. Curso básico de matemáticas 20 hrs. II semestre 1982. Torreón, Coah.
21. Curso básico de matemáticas 20 hrs. I semestre 1983. Colima, Col.
22. Análisis I 20 hrs. I semestre 1983. Torreón, Coah.
23. Cálculo 20 hrs. I semestre 1984. Saltillo, Coah.
24. Seminario de tesis 60 hrs. II semestre de 1984. Monterrey, N.L.
25. Curso básico de matemáticas 20 hrs. II semestre 1984. Gómez Palacio, Dgo.
26. Curso propedéutico, 20 hrs. I semestre 1985. Guadalajara, Jal.
27. Curso básico de matemáticas 20 hrs. II semestre 1985. Cd. Madero, Tamps.
28. Curso básico de matemáticas 20 hrs. II semestre 1985. Guadalajara, Jal.
29. Análisis I 20 hrs. II semestre 1985. Nuevo Laredo, Tamps.
30. Curso básico de educación 20 hrs. I semestre 1986. Guadalajara, Jal.

31. Curso básico de educación 30 hrs. I semestre 1986. Monterrey, N.L.
32. Análisis I 20 hrs. I semestre 1986. Gómez Palacio, Dgo.
33. Historia y fundamentos de la matemática. 20 hrs. II semestre 1986. Morelia, Mich.
34. Análisis I 30 hrs. I semestre 1987. Guadalajara, Jal.
35. Análisis II 20 hrs. I semestre 1987. Gómez Palacio, Dgo.
36. Diseño y desarrollo curricular 20 hrs. II semestre 1987. Nuevo Laredo, Tamps.
37. Diseño y desarrollo curricular 20 hrs. II semestre 1987. Gómez Palacio, Dgo.
38. Seminario de tesis 20 hrs. I semestre 1988. Gómez Palacio, Dgo.
39. Seminario de tesis 20 hrs. I semestre 1989. Gómez Palacio, Dgo.

Otros cursos de maestría

40. Curso propedéutico, 30 hrs. I semestre 1988. Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
41. Cálculo de varias variables 15 hrs. II semestre 1988. Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
42. Curso básico de educación 30 hrs. II semestre 1989. Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
43. Geometría 30 hrs. I semestre 1990. Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
44. Matemáticas y Conocimiento científico 30 hrs. II semestre 1990. Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
45. Historia y fundamentos de la matemática 48 hrs., II semestre 1990 Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
46. Historia y fundamentos de la matemática 48 hrs., II semestre 1991 Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx.
47. Historia y fundamentos de la matemática 48 hrs., II semestre 1991 Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx. junio, 1992
48. Historia y fundamentos de la matemática 48 hrs., II semestre 1996, Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx. sept., 1996

49. Taller de Procesos Educativos: Constructivismo en educación, 40 hrs, periodo de primavera, 1997. Maestría en Investigación y desarrollo de la educación, UIA. Méx. DF, enero, 1997.
50. Análisis de proyectos educativos, 40 hrs. Periodo de verano, 1997. Maestría en investigación y desarrollo de la educación, UIA. Méx. DF, junio, 1997.
51. Historia y fundamentos de la matemática 48 hrs., II semestre 1997. Maestría en Educación matemática, Toluca, Méx. sept., 1997.
52. Taller de Procesos Educativos: Constructivismo en educación, 40 hrs. Periodo de primavera, 1998. Maestría en Investigación y desarrollo de la educación, UIA. Méx. DF, enero, 1998.
53. Introducción a la epistemología, 48 hrs. 2º-cuatrimestre, 1999. Maestría en Investigaciones educativas, DIE-CINVESTAV.
54. Seminario especializado IV: Lectura de textos. 48 hrs. 3er. Cuatrimestre de 1999. Maestría en Investigaciones educativas, DIE-CINVESTAV.
55. Seminario especializado IV: Lectura de textos. 48 hrs. 3er. Cuatrimestre de 2001. Maestría en Investigaciones educativas, DIE-CINVESTAV.

Cursos Intensivos

56. Desarrollo conceptual del cálculo 40 hrs. 11-16 de marzo de 1985. Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jal.
57. La enseñanza del cálculo 40 hrs. 11-16 de agosto de 1986. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich.

Doctorado

58. Seminario de tesis: 80 hrs. 2º Semestre 1993. Sec. Metodología y Teoría de la Ciencia, CINVESTAV.
59. Seminario de tesis: 80 hrs. 1º y 2º Semestres 1994. Sec. Metodología y Teoría de la Ciencia, CINVESTAV.
60. Seminario de tesis: 80 hrs. 1º y 2º Semestres 1995. Sec. Metodología y Teoría de la Ciencia, CINVESTAV.
61. Seminarios de investigación: 48 hrs. 2° Semestre 1997. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

62. Seminarios de investigación: 48 hrs. 1° Semestre 1998. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
63. Seminarios de investigación: 48 hrs. 1° Semestre 1999. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
64. Seminarios de investigación: 48 hrs. 2° Semestre 1999. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
65. Seminario de investigación: 48 hrs. 1° Semestre 2000. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
66. Seminario de investigación: 96 hrs. 2° Semestre 2000. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
67. Seminario de investigación: 96 hrs. 1° Semestre 2001. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
68. Seminario de investigación: 96 hrs. 2° Semestre 2001. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes
69. Seminario de investigación: 96 hrs. 1° Semestre 2002. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
70. Seminario de investigación: 48 hrs. 2° Semestre 2002. Doctorado Interinstitucional en Educación Superior, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

3.2 Dirección de tesis

3.2 a) Doctorado

Concluidas:

1. Trigueros Gaisman, María: *Un modelo de medida con interacción*. 24 de septiembre de 1999 (*Apto Cum Laude*) Doctorado en Educación. Universidad Complutense de Madrid, Fac. de Educación (codirección con José Luis Gaviria, U. Complutense de Madrid).
2. Block Sevilla, David: *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*, 29 de marzo de 2001, Depto. de Investigaciones Educativas, CINVESTAV (codirección con Guy Brousseau, U. Bordeaux).
3. De Agüero Servín, Mercedes: *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matematizables de*

la vida cotidiana. 19 de agosto de 2002. Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Autónoma de Aguascalientes.

4. Eudave Muñoz, Daniel: *Valoración contextual de conceptos estadísticos en estudiantes universitarios*. Marzo, 2005. Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Autónoma de Aguascalientes.
5. Janet Esther Paul Wright: *Beliefs, practices and contexts of two high school biology teachers in México*. Febrero 2005. CINVESTAV.

En proceso

1. Gálvez Díaz, Víctor: *Las representaciones de la ciencia en las producciones discursivas de los alumnos de bachillerato que trabajan en colaboración a través de Internet*. Doctorado en Ciencias, especialidad Investigaciones Educativas, CINVESTAV.
2. Juárez Pacheco, Manuel: *Diseño, fundamentación teórica y prueba de una metodología de evaluación de software de soporte al aprendizaje colaborativo, presencial o a distancia, para la enseñanza de las ciencias.* Doctorado en Ciencias, especialidad Investigaciones Educativas, CINVESTAV.
3. Carvajal Cantillo, Enna: *El proceso de construcción de representaciones conceptuales compartidas en grupos de aprendizaje colaborativo en ciencias.* Doctorado en Ciencias, especialidad Investigaciones Educativas, CINVESTAV.
4. Guzmán Zazueta, María Luisa: *Interacción entre iguales y aprendizaje colaborativo en línea en la enseñanza de las ciencias*. Doctorado en Ciencias, especialidad Investigaciones Educativas, CINVESTAV.

3.2 b) Maestría

Concluidas

1. Bitelio, Truman: *Análisis del programa de Cálculo I de la Universidad de Honduras*: 16 de diciembre de 1983. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV (codirección con L. Moreno).

2 Velazquez, Mirna Consuelo: *Análisis de contenidos de un programa de geometría: propuesta de implementación didáctica*: 3 de febrero de 1984. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV (codirección con L. Moreno).

3 Fajardo, Manuel Antonio: *Análisis de contenidos de un programa de álgebra: propuesta de implementación didáctica*. 3 de febrero de 1984. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV (codirección con L. Moreno).

4. Alanís Rodríguez, Juan Antonio. *La adquisición del concepto de límite de una función*. 13 de septiembre de 1985. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV (codirección con L. Moreno).
5. Salinas, Patricia. *Obstrucciones e imágenes conceptuales en el aprendizaje de los números reales*: 13 de septiembre de 1985, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV (codirección con L. Moreno).
6. Ávalos Rangel, Alejandra: *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización*: 20 de marzo de 1997. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV (codirección con I. Fuenlabrada).
7. Moreno Sánchez, María Lucía: *Concepciones de los maestros de primaria en torno a la medición. Experiencias en un taller de actualización*: 30 de enero de 1998 Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV (codirección con I. Fuenlabrada)
8. López Garcés, Alfredo: *La situación problema como situación de aprendizaje*. 29 de septiembre de 1999. Maestría en *Educación Matemática*, Escuela Normal Superior núm. 1 del Estado de México.
9. Guzmán Zazueta, Ma. Luisa: *Formación, concepciones y práctica de los docentes de matemáticas*. 30 de marzo de 2000. Maestría en investigación y desarrollo de la educación, Universidad Iberoamericana, Santa Fe.
10. Gómez Vallarta, Rocío y Carvajal Cantillo, Enna: *Descripción y categorización de las concepciones epistemológicas y de aprendizaje de los profesores de ciencias a nivel medio y medio superior*. 19 de marzo de 2001. Maestría en investigación y desarrollo de la educación, Universidad Iberoamericana, Santa Fe.
11. Gálvez Díaz, Víctor Armando: *Las representaciones de la ciencia en la televisión educativa. El caso de la biología en Telesecundaria*. 21 de agosto de 2001. Maestría en Investigaciones Educativas Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV.
12. Sánchez, Carmina: *Las concepciones de los asesores de matemáticas como resultado de una práctica social en comunidades de aprendizaje.* 30 de enero de 2004. Maestría en Investigaciones Educativas Depto. de Investigaciones Educativas, CINVESTAV.

13. Valencia, Ruth: *Los maestros, los números y los sistemas de numeración. Descripción analítica de una experiencia de actualización*. 2 de febrero de 2004 Maestría en investigaciones educativas Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV (codirección con I. Fuenlabrada).

En proceso

1. Pineda, Margarito: *Errores frecuentes en la operación de los números negativos*. Maestría en Educación Matemática, Escuela Normal Superior núm. 1 del Estado de México (concluida, en espera de fecha de examen).
2. Larios Togo, Olga Ivalú: *La concepción infantil sobre el aprendizaje*. Maestría en Investigaciones Educativas Depto. de Investigaciones Educativas, CINVESTAV.
3. Vergara Genoveva: *Uso e influencia de Internet en grupos de aprendizaje*. Maestría en investigación y desarrollo de la educación, Universidad Iberoamericana, Sta. Fe.
4. González Peñalosa Mariana: *Fluidez tecnológica de los maestros de ciencias en el bachillerato.* Maestría en Investigaciones Educativas Depto. de Investigaciones Educativas, CINVESTAV.
5. Hernández Hernández, Antonia: *La motivación en la enseñanza de las ciencias, en una experiencia de aprendizaje asistido por tecnologías de información y comunicación*. Maestría en Investigaciones Educativas Depto. de Investigaciones Educativas, CINVESTAV.

4. Repercusión académica

Artículos de más alto impacto en revistas de la especialidad

1. El artículo relacionado con el número 2.1 a) 5: Moreno, L. y Waldegg, G. (1991): "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity" fue publicado en la revista de mayor reconocimiento e impacto internacional en el área de Educación matemática, *Educational Studies in Mathematics* 22 (3) 211-231, tiene 18 citas registradas en revistas internacionales, la primera, recién publicado el artículo (en 1992) y la última, en 2002.
2. El artículo reportado con el número 2.1 a) 6: Moreno, L. y G. Waldegg (1992). "Constructivismo y educación matemática" en *Educación Matemática*

4 (2) 7-15, México. Fue reproducido en *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas*. Programa Nacional de Actualización Permanente SEP, México, 1995, pp. 49-66 (tiraje inicial de 20 000 ejemplares) y en *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas.* Programa Nacional de Actualización Permanente SEP, México, 1995, pp. 27-39 (tiraje inicial de 100 000 ejemplares), y traducido al inglés a solicitud de la revista como: Moreno, L., Waldegg, G. (1993). "Constructivism and Mathematical Education" en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 24 (5) 653-661, UK. y al portugués como Moreno, L. Waldegg, G: "Constructivismo e Educaçao Matemática" en *Matemática (s)em rede. Formação de acompanhantes locais da região centro*. Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, Portugal (Disponible en http://membros.aveiro-digital.net/adam/oficina/textos/constructo.pdfTiene). Tiene 10 citas registradas.

Citas en artículos de investigación

Los siguientes trabajos han sido citados o reseñados (la referencia de la cita o reseña aparece en la relación de artículos).

1. Tesis de doctorado (no publicada).

21 Moreno, L. y G. Waldegg (1987). "El análisis matemático y su aritmetización" en MATHESIS, III (1) 49-72, México.

22 Waldegg, G. (1988). "Cantor y la matematización del infinito" en MATHESIS, IV (2) 75-96, México.

23 Moreno, L. y G. Waldegg (1991). "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity" en Educational Studies in Mathematics 22 (3) 211-231, Dordrecht, Holanda.

24 Moreno, L y G. Waldegg (1992). "Constructivismo y educación matemática" en *Educación Matemática* 4 (2) 7-15, México.

25 Waldegg, G. (1993). "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction" en Annales de Didactique et Sciences Cognitives de l'IREM núm. 5, 19-36, Estrasburgo, Fr.

26 Waldegg, G. (coord.) (1995). *Procesos de enseñanza y aprendizaje* II, vol. 2. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa / Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano, pp. 267, ISBN 968-7542-047.

27 Ávila, A. y Waldegg, G. (1997). *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*. México: Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, pp. 62. ISBN 968-29-8823-3.

28 Waldegg, G. (1997). "Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique", en *For the Learning of Mathematics* 17 (1) 43-46, Canadá.

29 Waldegg, G. (1998). "Principios constructivistas para la Educación matemática", en *Revista EMA*, vol. 4, núm. 1, pp. 1-16, Bogotá.

Citas en artículos de revisión

Los siguientes trabajos han sido citados en artículos de revisión del campo, la referencia bibliográfica aparece en la relación de los trabajos.

1. Tesis de doctorado (no publicada)

30 Figueras, O. y G. Waldegg (1984). "A First Approach to Measuring (Children between 11-13 Years Old)", en J. Moser, Ed.: *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 95-100, Wisconsin.

31 Moreno, L. y G. Waldegg (1991). "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity", en *Educational Studies in Mathematics* 22 (3) 211-231, Dordrecht, Holanda.

32 Waldegg, G. (1993). "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction", en *Annales de Didactique et Sciences Cognitives de l'IREM,* núm. 5, 19-36, Estrasburgo, Fr.

33 Moreno, L. y G. Waldegg (1995). "Variación y representación: del número al continuo", en *Educación Matemática*, 7 (1) 12-28, México.

Participación en Comités editoriales

1. Miembro fundador y coordinadora del Comité Editorial de la revista *Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, SA de CV y Editorial Santillana, SA (a partir de 2003): Enero 1988 a diciembre 2003 (Revista aceptada en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Conacyt, Promoción 1997). Esta revista es la única publicación en español en

el mundo con proyección internacional, publica regularmente artículos de autores de Latinoamérica, Europa y Norteamérica; es empleada como material de referencia en cursos de posgrado en todos los países de habla hispana y, desde 1992, aparece en el índice más importante de revistas del campo: el ZDM (Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik).

34 Miembro del Comité Editorial de la Serie *OPERA PRIMA*, Publicación de la Sección de Matemática Educativa. 1989-1999

35 Miembro del Comité Editorial de los *Cuadernos del Seminario de Epistemología*, CCH-UNAM. 1994-1999.

36 Miembro del Comité Editorial de la *Revista Mexicana de Investigación Educativa* del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (aceptada en el Índice de Revistas Científicas de Conacyt), 1996-2001.

37 Miembro del Consejo Editorial de la *Revista Mexicana de Investigación Educativa* del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (aceptada en el Índice de Revistas Científicas de Conacyt), 2002 a 2004.

38 Miembro del Comité Científico de *Science et Techniques en Perspective (Revue International de Histoire et de Philosophie des Sciences et des Technique),* 1997-2000.

39 Miembro del Comité Editorial de la *Revista Electrónica de Investigación Educativa. 2001 ICAAP Excellence in Electronic Publishing Award* (Consorcio Internacional para el Avance de las Publicaciones Académicas (ICAAP). Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo, Universidad Autónoma de Baja California. Octubre 1999 a 2004.

40 Miembro del Consejo Editorial de la revista *Educación Matemática en las Américas*. Interamerican Committee on Mathematics Education. Comité Interamericano de *Educación Matemática*. IACME-CIAEM. Julio de 2000 a 2004.

41 Miembro del Comité Editorial de la revista *Innovación Educativa* del Instituto Politécnico Nacional, mayo 2002 a 2004.

Artículos publicados por invitación

1. Waldegg, G. (2000) "El surgimiento de la investigación en Educación Matemática", en *Paradigma*, volumen XXI, no. 1, junio de 2000, pp. 115 –138, Maracaibo, Venezuela.

42 Waldegg, G. (2001). "Panorama actual de la investigación educativa en México", en *Educación 2001*, VI, núm. 70, marzo, pp. 43-48

43 Waldegg, G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4* (1). http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-waldegg.html

Libros de impacto en el campo

La serie de libros de textos para secundaria fue una de las dos únicas series aprobadas por la Secretaría de Educación Pública en 1998. A la fecha se han tirado más de 1,800,000 de ejemplares y se emplea como texto gratuito en varios estados del país.

1. Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (1998). *Matemáticas en Contexto 1er año Secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 250 pp. ISBN 970-625-171-5

44 Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (1998). *Matemáticas en Contexto 2o. año Secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica 243 pp. ISBN 970-625-172-3

45 Waldegg, G., García, V. y Villaseñor, R. (1998). *Matemáticas en Contexto 3er año Secundaria*. México: Grupo Editorial Iberoamérica 256 pp. ISBN 970-625-173-1

Los libros de texto gratuitos de matemáticas para 5º y 6º año de primaria y los libros para el maestro de física de secundaria de la Secretaría de Educación Pública han tenido tirajes entre 50,000 y 2,850,000 ejemplares anuales.

Conferencias por invitación en congresos internacionales

1. Primer seminario sobre la enseñanza de las matemáticas Universidad de San Carlos de Guatemala. Guatemala, Guat. 13-16 de marzo de 1989. Conferencia (por invitación), "Esquemas de respuesta ante el infinito matemático".

46 Primer seminario sobre la enseñanza de las matemáticas Universidad de San Carlos de Guatemala. Guatemala, Guat. 13-16 de marzo de 1989. Conferencia (por invitación), "La enseñanza de la matemática en el nivel superior en México".

47 Foros Internacionales de Análisis sobre Educación y Sociedad. Secretaría de Educación del Estado de Jalisco, Guadalajara, Jal, Abril 29, 1994. Ponencia (por invitación), "Factores ocultos en los procesos educativos: necesidad de explicitarlos".

48 II Université d'été Européenne: Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique. Universidad de Braga, Portugal, Julio 19-23, 1996. Ponencia (por invitación), "Les questions de l'histoire dans la recherche en didactique: éléments méthodologiques".

49 II Congreso Iberoamericano de *Educación Matemática*. 26-31 de julio de 1998, Universidad Central de Venezuela, Caracas. Conferencia Central (por invitación), "Principios constructivistas para la Educación Matemática".

50 V Reunión de Didáctica de las Matemáticas del Cono Sur. Universidad de Santiago de Chile, 10-14 de enero de 2000. Conferencia Inaugural (por invitación), "¿Qué nos han dejado las reformas en la enseñanza de las matemáticas?"

51 III Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) y III Encuentro de Educación Matemática Región Zuliana (EDUMATZ), 12 al 15 de octubre de 2000, Facultad de Humanidades y Educación de Universidad del Zulia en Maracaibo – Venezuela. Conferencia plenaria, "Condiciones epistemológicas del conocimiento matemático en escenarios de aprendizaje social".

52 III Congreso Venezolano de Educación Matemática (COVEM) y III Encuentro de Educación Matemática Región Zuliana (EDUMATZ), 12 al 15 de octubre de 2000, Facultad de Humanidades y Educación de Universidad del Zulia en Maracaibo – Venezuela. Ponencia, "La resolución de problemas en el aula: del discurso a la acción".

53 Atelier de travail: Varie pour mieux trouver. Histoire de la notion de variation, 4-11 de septiembre de 2000, Pátzcuaro, Mich. Ponencia, "La représentation de la variation: Nicole d'Oresme et le Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum".

54 III Encuentro Internacional de Investigación Educativa: Los retos en la educación del siglo XXI. Universidad de Guadalajara, XIV Feria Internacional del Libro de Guadalajara. 30 noviembre-1º de diciembre de 2000. Ponencia, "La gestión escolar y los modelos de aprendizaje". Mesa: Modelos mentales, representaciones espontáneas y teorías implícitas.

Organización de reuniones y congresos científicos

1. I Coloquio Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia "Matemáticas, Historia y Cultura: Imágenes de una época". UAM, UNAM y CINVESTAV, México, DF. Septiembre 20-22, 1994.

55 II Coloquio Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia "La continuidad en la física y en la matemática". UAM, UNAM y CINVESTAV, México, DF. Septiembre 27-29, 1995.

56 III Congreso Nacional de Investigación Educativa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, Universidad Pedagógica Nacional. México, DF. Octubre 24-27, 1995.

57 Seminario "La epistemología y la Ciencia Contemporánea". CINVESTAV, UNAM, UAM, Colmex, U.A. Estado de Morelos, U.A. Querétaro. Unidad de Seminarios "Ignacio Chávez" C.U., México, Abril 23-25, 1996.

58 Homenaje Latinoamericano por el Centenario del Nacimiento de Jean Piaget. Antigua Escuela de Medicina, Centro Histórico de la Ciudad de México, Abril 25-27 abril, 1996.

59 IV Congreso Nacional de Investigación Educativa: 28-31 de octubre, Mérida, Yuc., Universidad Autónoma de Yucatán, Consejo Mexicano de Investigación Educativa. Coordinadora del Comité Científico.

60 Seminario Internacional sobre Innovaciones Educativas en Ciencias Naturales y Matemáticas SEP-OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). 12-15 de octubre: Cuernavaca, Mor. Comité Científico.

61 V Congreso Nacional de Investigación Educativa: 30-31 de octubre, 1 y 2 de noviembre, Aguascalientes Ags. Universidad Autónoma de Aguascalientes, Consejo Mexicano de Investigación Educativa. Coordinadora del Comité Científico.

62 Seminario latinoamericano La enseñanza de las ciencias en la escuela secundaria. Diagnóstico y perspectivas. SEP-OREALC-UNESCO 27-30 junio de 2001. Cholula Puebla.

Distinciones académicas

1. Beca de Investigación de la Fundación Jean Piaget de la Universidad de Ginebra, Archives Jean Piaget, Ginebra, Suiza. Octubre-diciembre de 1998.

5. Criterios adicionales

Participación en comisiones asesoras, evaluadoras o dictaminadoras de instituciones académicas o científicas y en asociaciones científicas o académicas

1. Miembro del Comités de Selección de Becarios del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 1983.

63. Miembro de la Comisión Ordinaria de Promoción y Becas de Exclusividad. CINVESTAV 1988-1989.

64 Miembro del Jurado calificador de la 2a. Olimpiada Nacional Matemática. Abril 1989.

65 Evaluador de proyectos de investigación del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 1989 a 2004.

66 Miembro externo del Jurado Calificador de examen de oposición, UNAM-UACPYP. Enero, 1990.

67 Miembro de la Comisión de Promoción y Estímulos para el Personal Académico del CINVESTAV 1991-1992.

68 Miembro del Comité de Ciencias Sociales del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología: 1991-1993.

69 Miembro del Jurado Evaluador del Concurso para la Renovación de los Libros de Texto Gratuitos. Subsecretaría de Educación Básica y Normal, SEP. Marzo-mayo, 1993.

70 Miembro invitado de la Comisión Dictaminadora del Consejo Técnico de la Facultad de Ciencias, UNAM. 24 de febrero de 1994

71 Miembro externo de la COFFA(Comisión de Becas del Instituto Politécnico Nacional) 1994-1995.

72 Miembro de la Comisión de Admisión y del Consejo Consultivo del Consejo Mexicano de Investigación Educativa. Febrero de 1994-1996.

73 Miembro invitado de la Comisión Dictaminadora del Consejo Técnico del Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades, UNAM. Septiembre de 1995 a febrero 1999.

74 Miembro del Consejo Consultivo del Consejo Mexicano de Investigación Educativa. Febrero de 1994 a febrero de 1998.

75 Miembro invitado el Comité de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional. Enero, 1997 a 2004.

76 Miembro del Comité Asesor del Programa Interinstitucional de Investigaciones sobre Educación Superior (PIIES). Marzo 1997 a marzo de 1999.

77 Miembro de la Comisión de Doctorado Interno del Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV. Mayo, 1997 a 2004.

78 Miembro del Comité de Ciencias Sociales para la evaluación de becarios al extranjero del Conacyt.

79 Miembro del Comité de evaluación de becas Fullbright-García Robles.

80 Secretaria general del Consejo Mexicano de Investigación Educativa. Marzo 1998-2000.

81 Miembro del Consejo Nacional de Participación Social en la Educación, y coordinadora del Grupo de Trabajo Planes, programas y contenidos de estudio. Agosto 1999.

82 Miembro del Colegio Académico de Transición, Sección de Metodología y teoría de la Ciencia, CINVESTAV. Septiembre, 1999.

83 Vocal por México del Comité Interamericano de Educación Matemática. Octubre 1999.

84 Presidente del COMIE, 2000-2001.

85 Miembro externo del Consejo Técnico de la Maestría en Investigación y Desarrollo de la Educación de la Universidad Iberoamericana. Octubre 2000-septiembre 2002.

86 Miembro del jurado dictaminador del 2º Concurso Experiencias en el Aula, Matemáticas. Editorial Santillana, México, junio 2002.

87 Miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias. Noviembre 2002.

Revisiones técnicas

1. Chamizo, J. A. (coord.) (1998). *Ciencias Naturales. Libro de texto gratuito para quinto grado de educación primaria*, Secretaría de Educación Pública, México. ISBN 970-18-1599-8 (Tiraje inicial 2,903,750 ejemplares).

88 Chamizo, J. A. (coord.) (1999). *Ciencias Naturales y Desarrollo Humano. Libro de texto gratuito para sexto grado de educación primaria*, Secretaría de Educación Pública, México. ISBN 970-18-3097-0 (tiraje inicial 2,797,000 ejemplares).

Jefaturas y coordinaciones

1. Coordinadora académica. Sección de Matemática Educativa, año 1983.

89 Coordinadora académica. Sección de Matemática Educativa, año 1985.

90 Jefe de la Sección de Matemática Educativa, enero 1o de 1988-noviembre 30 de 1989.

91 Coordinadora académica de la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia, julio 1993-diciembre 1996.

92 Coordinadora académica del Seminario de Sistemas Complejos UNAM-CINVESTAV, marzo 1994-diciembre 1996.

93 Coordinadora de Publicaciones del Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV. Abril 1999-mayo 2003

Proyectos de investigación con financiamiento externo

1. Desarrollo de material educativo para el sistema MicroSEP en apoyo a los programas de matemáticas del bachillerato tecnológico

   Convenio núm. P218CCOO882370 Conacyt. Financiamiento total: $ 20’000,000.00. Oct 88-Nov.89
   Guillermina Waldegg: Directora del proyecto
   Investigadores participantes: Jesús Alarcón, Luis Moreno Armella, Blanca Margarita Parra, Ricardo Quintero, Ernesto Sánchez, Sonia Ursini (CINVESTAV)

94. Los conceptos fundamentales de la matemática y los problemas de su aprendizaje: continuidad e infinito

    Proyecto núm. 1623-S9208 Conacyt. Financiamiento total: $ 96'500,000.00. Nov. 1992-Jul 1995
    Guillermina Waldegg: Directora del proyecto
    Investigadores participantes: Jesús Alarcón, Luis Moreno Armella, Mirela Rigo (CINVESTAV), Carlos Álvarez Jiménez (UNAM).

95 Comunidades de aprendizaje y tecnologías colaborativas: Estudio de los procesos de construcción, representación y difusión del conocimiento en alumnos de bachillerato sobre temas transversales de ciencias

    Proyecto núm. G33909-S Conacyt. Financiamiento total $3'240,468.00. Oct. 2000-sep 2004. Cofinanciado por la Universidad de Montreal.
    Guillermina Waldegg: Directora del proyecto
    Investigadores participantes:
    Janet Esther Paul Wright (Universidad Autónoma del Estado de Morelos), Manuel Juárez Pacheco (Universidad Autónoma del Estado de Morelos), Alicia Martínez Dorado (UNAM, Colegio Madrid), Jesús Vázquez Abad (Universidad de Montreal), José Antonio Chamizo (UNAM), Nancy Bousseau (Universidad de Montreal), Enna Carvajal (CEE), María Luisa Guzmán (CBTyS 8, Pachuca).

Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg
se terminó de imprimir en XXXX de 2008
en XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXX
La edición consta de 500 ejemplares más sobrantes para reposición.